ORSAY
N° d'ordre : 3240

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS - SUD
CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR 3ème CYCLE
Spécialité : PHYSIQUE THEORIQUE

par

Pierre Olivier LAGAGE

ACCELERATION DES RAYONS COSMIQUES PAR ONDE DE CHOC DANS UN MILIEU DIFFUSIF :
A LA RECHERCHE DES HAUTES ENERGIES

Soutenue le 14 juin 1982, devant la Commission d'Examen

M.	HEYVAERTS	Président
Mme	CESARSKY	
Mme	GOUGUENHEIM	Examinateurs
M.	RYTER	

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543523_0046

ORSAY
N° d'ordre : 3240

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS - SUD
CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR 3ème CYCLE
Spécialité : PHYSIQUE THEORIQUE

par

Pierre Olivier LAGAGE

ACCELERATION DES RAYONS COSMIQUES PAR ONDE DE CHOC DANS UN MILIEU DIFFUSIF : A LA RECHERCHE DES HAUTES ENERGIES

Soutenue le 14 juin 1982, devant la Commission d'Examen

M.	HEYVAERTS	Président
Mme	CESARSKY	
Mme	GOUGUENHEIM	Examinateurs
M.	RYTER	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

REMERCIEMENTS

Pour commencer une thèse il faut un labo et un directeur de thèse.

J'ai eu la chance de tomber dans un bon labo,la section d'Astrophysique du C.E.N. Saclay;je remercie sincèrement son responsable,CHARLES RYTER,pour m'y avoir accepté.

J'ai eu également un très bon directeur de thèse ;Merci CATHERINE CESARSKY pour m'avoir donné un sujet très interressant.Tu as veillé au bon cheminement de cette thèse.Les nombreuses discussions que nous avons eues ont été très enrichissantes pour moi.

Le milieu ambiant dans lequel ce travail a pu éclore a été on ne peut plus favorable.Merci particulièrement à JEAN-PAUL MEYER et THIERRY MONTMERLE pour leurs encouragements et leur soutien tout au long de cette thèse.

Je remercie également les personnes qui ont rendu cette thèse agréable à l'oeil: Mme CHAUCHON et FRANÇOISE SCHNURIGER pour la frappe et SIMONE QUERAN pour les dessins.

Pour juger de la qualité d'une thèse un jury doit être designé.
Je remercie vivement JEAN HEYVAERTS qui,malgré un emploi du temps chargé,a accepté d'être le president de ce jury,ainsi que LUCIENNE GOUGUENHEIM et CHARLES RYTER qui ont bien voulu en être membres.

ABSTRACT

In recent years the old problem of galactic cosmic-ray acceleration has become alive again,with the study of a new acceleration mechanism by supernova shock waves in a diffusive medium.The mechanism is summarized in the preamble and in the introduction of the 4thpaper at the end.It is very attractive because it predicts the right energy spectrum for the cosmic rays,but it is very slow.So the question is : do supernova shocks have enough time to accelerate cosmic rays beyond 10^4-10^5 GeV ?

In section I,we establish a firm upper limit to the energy that can be acquired by particles trapped in the vinicity of the shock;we consider that the mean free path of the particle has its lowest possible value and the most favorable model of supernova evolution.

In section II,we investigate in details the diffusion coefficients which are relevant for the determination of the high energy cut off.We establish the spatial dependence of the diffusion coefficient,and consider the effects of the damping of the magnetic turbulence responsible for the diffusion and of wave-wave interactions.

In section III,we examine the effect of the spatial dependence of the diffusion coefficient on the rate of acceleration of the particles.We point out the similarity between the problem of particle acceleration by diffusive shock,and that of a random walk of particles in the presence of an absorbing moving wall.We solve the latter problem in details.

In section IV,a more realistic cut off energy is calculated using the results of the previous sections.We find $E_{max} = 2.10^4$ GeV;thus it is clear that in this framework,supernova shocks can only account for a few decades of the cosmic ray spectrum.

Key words : cosmic-ray acceleration ;shock wave ;hydromagnetic wave. Supernova.Random walk.

S O M M A I R E

PRÉAMBULE

PREMIÈRE PARTIE - ÉNERGIE MAXIMUM-MAXIMORUM PRÉDITE PAR LE MODÈLE

Introduction

A - Temps de vie fini de l'onde de choc

I - Méthode de calcul

II - Evolution de la Supernova

II.1 - Vitesse du choc

II.2 - Force du choc

B - Sphéricité du choc

I - Effets de la sphéricité

II - Importance par rapport au temps de vie fini du choc

Conclusion

DEUXIÈME PARTIE - ÉTUDE DES COEFFICIENTS DE DIFFUSION

Introduction

A - Turbulence en amont du choc

I - Dépendance spatiale du coefficient de diffusion D_1

I.1 - Equations

I.2 - Résolution

I.3 - Applications numériques et discussion des résultats

II - Amortissement des ondes

II.1 - Milieu neutre ou partiellement ionisé
II.2 - Milieu chaud

III - Interactions onde-onde

III.1 - Equations
III.2 - Résolution

B - Turbulence en aval du choc

I - Dépendance spatiale du coefficient de diffusion
II - Comparaison avec la turbulence amont

Conclusion

TROISIÈME PARTIE - ETUDE DYNAMIQUE INCLUANT LA DÉPENDANCE SPATIALE DE D_1

Introduction

A - Solution asymptotique aux grands temps de l'équation de transport

I - Solution exacte dans l'espace de Laplace
II - Solution approchée dans l'espace des temps

II.1 - Exposé de la méthode
II.2 - Application

a) Propriétés de h
α. Analycité
β. Variations

b) Calcul de Φ (t')

II.3 - Propriétés du nouveau paramètre dynamique
II.4 - Validité de la solution

B - Un problème de marche au hasard

I - Présentation du problème et lien avec le modèle
II - Application : coefficient de diffusion constant
III - Application : coefficient de diffusion $D_1(x)$

Conclusion

QUATRIÈME PARTIE - ÉNERGIE RÉALISTE DE LA COUPURE

Introduction

A - Problème des hautes énergies

I - Influence de la dépendance spatiale de D

II - Influence de la dépendance temporelle de D

II.1 - Equation approchée pour les particules

II.2 - Equation approchée pour les ondes

II.3 - Résolution numérique

III - Influence de l'évaporation des nuages

B - Solution ?

I - Diffusion plus forte ?

II - Evolution différente du choc de S.N. ?

II.1 - Halo

II.2 - Choc non linéaire

III - Plusieurs S.N. ?

IV - Ailleurs : vents ?

RÉSUMÉ ET CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXE

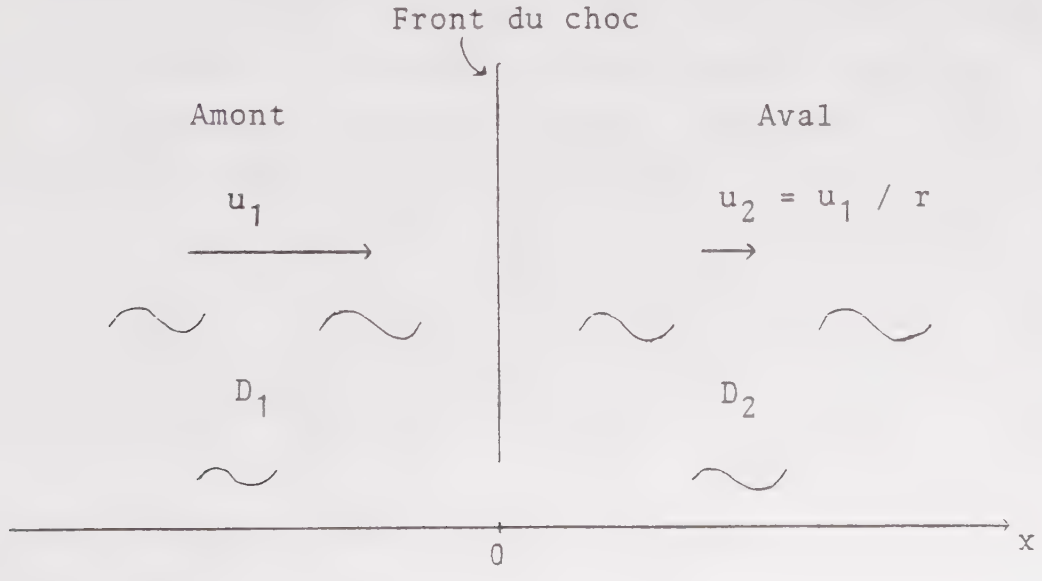
- Communications à des congrès
- Article

P R E A M B U L E

Ces dernières années, le vieux problème de l'accélération des Rayons Cosmiques Galactiques (R.C.G.) a connu un regain d'intérêt grâce à l'étude d'un nouveau mécanisme d'accélération (Krymsky, 1977 ; Axford, Leer et Skadron, 1977 ; Bell, 1978 a, b ; Blandford et Ostriker, 1978). Nous résumons ci-dessous les principales caractéristiques du mécanisme sous sa forme la plus simple : choc plan, particules-test, champ magnétique perpendiculaire au choc. Pour plus de détails le lecteur est renvoyé à l'article de synthèse d'Axford (1981).

Ce mécanisme a besoin de deux ingrédients : une onde de choc et un milieu diffusif. Les meilleurs candidats, ondes de choc, à l'accélération des R.C.G. sont, pour des raisons énergétiques, les Supernovae (S.N.). La diffusion est une diffusion magnétique ; les particules se heurtent aux petites perturbations (ΔB) du champ magnétique (B). Dans le cadre de la théorie quasi-linéaire, ces interactions sont équivalentes à une diffusion de coefficient $D = \frac{4}{3\pi} r_e v (\frac{\Delta B}{B})^2$; v est la vitesse et r_e le rayon de Larmor des particules. En aval le choc peut créer cette turbulence. En amont il est couramment fait appel aux R.C. pour faire croître la turbulence.

Les notations sont précisées sur la figure ci-dessous :



$D_i = \frac{1}{3} v \lambda_i$ (i=1,2) est le coefficient de diffusion ; λ_i le libre parcours moyen.

u_i est la vitesse du milieu dans le repère du choc. $\Delta u = u_1 - u_2$.

r est le facteur de compression.

La fonction de distribution des particules dans l'espace des phases, f, vérifie l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_i \frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{1}{3} p \frac{\partial f}{\partial p} \Delta u \, \delta(x) + Q_o \, \delta(x) \qquad (1)$$

Les variables x et t sont les coordonnées d'espace et de temps. p est l'impulsion de la particule. i = 1 (2) quand $x < 0$ (> 0). $Q_o \, \delta(x)$ représente l'injection au choc. δ est la fonction de Dirac.

La solution stationnaire de l'équation (1) en x = 0, f_o, est :

$$f_o(p) = q \, p^{-q} \int_o^p p'^{\,q-1} \left[\frac{Q_o(p')}{u_1} + f(x = \infty, p')\right] dp' \qquad (2)$$

avec $q = 3 u_1/\Delta u$. Si on injecte une fonction $\delta(p' - p_o)$, alors f_o est une loi de puissance d'indice q. Ce résultat reste vrai, du moins pour p supérieur à quelques p_o, si on injecte une loi de puissance $p'^{-q'} H(p' - p_o)$ (H est la fonction de Heaviside) avec $q' > q$, alors que si $q' < q$ le spectre garde l'indice q'.

Une autre dérivation très jolie de ce résultat, due à Bell (1978), insiste sur l'aspect séquentiel du phénomène. A chaque aller-retour à travers le choc, l'impulsion p des particules va augmenter en moyenne de la quantité $\Delta p = \frac{4}{3} \frac{\Delta u}{v} p$. En amont du choc les particules vont être diffusées et convectées vers le choc. Ainsi elles retraverseront toutes le choc. Par contre, en aval la convection aura tendance à les éloigner du choc. Aussi certaines d'entre-elles vont pouvoir

s'échapper ; la probabilité d'échappement est de 4 u_2/c. On retrouve alors la loi de puissance précédente.

C'est un mécanisme très général qui, conçu originellement pour les R.C.galactiques ou extragalactiques peut être utilisé pour expliquer les R.C. solaires (Achterberg et Norman, 1980) ou les excès de R.C. nécessaires pour l'interprétation de la forte émission γ de certains nuages (Montmerle et Cesarsky, 1981). La loi de puissance a la remarquable propriété d'être indépendante des coefficients de diffusion et pour un choc fort l'indice q vaut 4, très proche de la valeur observée pour le spectre des R.C.G. une fois corrigé des effets de propagation. En effet, le spectre intégral ($\int_o^p p^2 f(p) dp$) observé est une loi de puissance d'indice - 1.75 (figure 1).

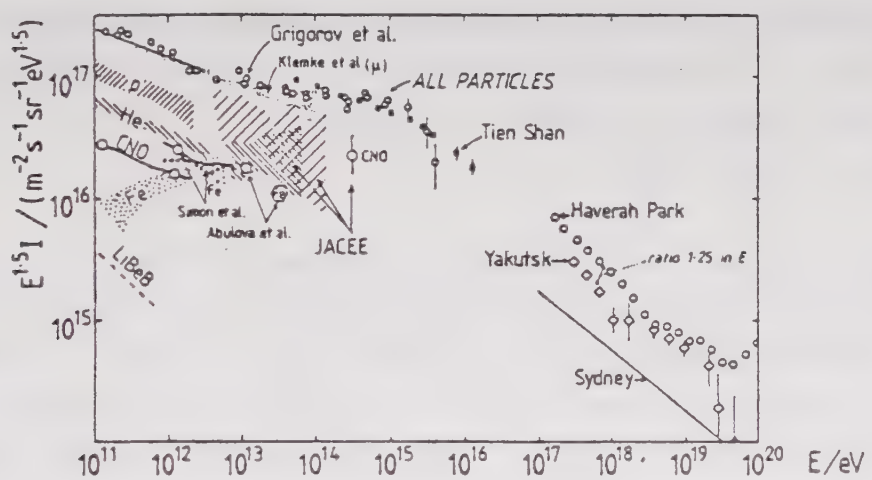


Figure 1 - Spectre intégral des R.C., tiré de Hillas (1981). E est l'énergie des R.C. ; E = pc (particules relativistes).

Mais le rapport des R.C. primaires sur les R.C. secondaires (R.C. créés lors de la propagation) décroît avec l'énergie. Ces résultats expérimentaux s'interprètent très bien dans le modèle "passoire" en supposant que le temps de fuite des R.C. de la galaxie est proportionnel à $E^{-0.5}$ (Perron et al., 1981) et dans le modèle basé sur la diffusion en supposant que le coefficient de diffusion est proportionnel à $E^{0.5}$ (voir la

discussion dans Cesarsky, 1980). Le spectre à la source est alors $E^{-1.25}$. L' autre contrainte expérimentale pour le modèle, à savoir la composition chimique des éléments primaires qui est connue avec une excellente précision grâce aux obser vations du satellite HEAO 3 C2 (Koch-Miramond , 1981) , est repoussée dans le problème de l'injection des particules ; en effet, le mécanisme n'amène pas de changement de composition des particules injectées, du moins pour les particules relativistes. Une comparaison minutieuse des R.C.G. et des particules énergétiques solaires est un précieux guide pour le problème de l'injection (Meyer, 1981).

Cependant, le modèle rencontre certaines difficultés. L'une d'elles est sa lenteur qui amène forcément une coupure dans les spectres d'énergie à une énergie maximale.Or le spectre observationnel (voir figure 1) possède la même pente jusqu'à au moins 10^5 GeV. Le mécanisme aura-t-il le temps de fabriquer les R.C. de haute énergie pendant la durée de vie de la S.N.? C'est l'objet de cette thèse.

Dans la première partie nous donnons l'énergie maximale absolue atteinte pendant le temps de vie de l'onde de choc, la diffusion étant maximale et l'évolution de la S.N. la plus favorable. Le reste de la thèse est la quête d'une valeur plus réaliste de cette énergie. Ainsi dans la deuxième partie nous examinons en détail les coefficients de diffusion qui, bien que n'intervenant pas pour la solution stationnaire, sont déterminants pour la coupure du spectre à haute énergie ; dépendance spatiale, amortissement des ondes, interactions onde-onde sont étudiés. Dans la troisième partie la dépendance spatiale de D est incorporée dans la recherche des solutions dépendantes du temps. Un problème de marche au hasard y est développé. Enfin, la quatrième partie utilise les résultats des parties précédentes pour établir de façon réaliste l'énergie à la coupure ; suit une discussion du résultat.

PREMIERE PARTIE

ENERGIE MAXIMUM-MAXIMORUM PREDITE PAR LE MODELE

Il a été très vite reconnu que la théorie prédisait l'existence d'une coupure dans le spectre à haute énergie ; mais elle varie dans la littérature de 30 GeV à 10^6 GeV. Dans cette partie nous envisageons les deux causes principales de coupure, à savoir le temps de vie fini du choc et la sphéricité du choc, en prenant systématiquement le parti le plus optimiste, c'est-à-dire que nous obtenons une borne supérieure à l'énergie maximale atteinte. Nous avons notamment introduit la contrainte, λ minimum égal r_e (rayon de Larmor des particules) et tenu compte de l'évolution de la S.N.

A - TEMPS DE VIE FINI DE L'ONDE DE CHOC

I - Méthode de calcul

Nous sommes confrontés au problème des solutions dépendantes du temps qui sera développé en détail dans la troisième partie. Ici la meilleure façon d'aborder le problème est l'approche séquentielle introduite par Krymsky et al. (1979), pour laquelle l'entité de base est le temps d'un cycle, T_{cycle}, qui lorsque λ_i et u_i sont constants vaut :

$$T_{cycle} = \frac{4}{3}\left(\frac{\lambda_1}{u_1} + \frac{\lambda_2}{u_2}\right) \qquad (1_1)$$

Faisant l'approximation :

$$\frac{dp}{dt} \simeq \frac{\Delta p}{T_{cycle}} = \frac{u_1 - u_2}{c} \; \frac{p}{\frac{\lambda_1}{u_2} + \frac{\lambda_2}{u_2}} \qquad (2_1)$$

où Δp est le gain moyen d'impulsion pendant un cycle, puis en intégrant, on obtient p en fonction du temps.

Dans le cas D et u constants, ce résultat approché s'accorde très bien avec le calcul exact fait à partir de l'équation de transport (1) (Krymsky et al., 1978). Nous avons généralisé cette approche lorsque D dépendait de p et u de t ; c'est le cas dans bien des situations intéressantes (par exemple choc de S.N.). Ceci est justifié quand u varie peu pendant le temps d'un cycle ; ce qui permet par ailleurs d'utiliser la formule (1_1). Depuis, la validité de cette approche a été confirmée d'une part, lorsque D dépendait de p, à la fois par les simulations Monte Carlo (Ellison, 1982) et par les solutions asymptotiques aux grands temps de l'équation (1) (Axford, 1981) et d'autre part, par la solution de l'équation de transport pour D constant et u(t) proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ (Prishchep et Ptuskin, 1981).

II - Evolution du choc de S.N.

II.1 - Vitesse du choc

Nous considérons ici l'évolution d'une S.N. dans le milieu chaud ($n_e = 3\ 10^{-3}$ particule/cm^3 ; $T = 7\ 10^5$ °K), négligeant les nuages. Ce milieu doit remplir une fraction importante de l'espace interstellaire comme le suggèrent à la fois des arguments théoriques (chauffage par les S.N.) et observationnels (par exemple raies en absorption de O VI). L'évolution d'une S.N. dans un milieu de densité uniforme se décompose en trois phases (Woltjer, 1972). Lors de la première phase l'influence du milieu dans lequel la S.N. explose est faible. La solution dépend beaucoup du détail de l'explosion ; grossièrement un choc se propage à la vitesse $u \sim 2\ 10^9$ cm/s des particules. Lorsque la masse éjectée par la S.N., M_e, typiquement de l'ordre de 0.25 $M_\odot$, est égale à la masse du milieu englobé par le choc, $\frac{4}{3}\pi\ \rho\ r_s^3$, le milieu interstellaire n'est plus négligeable. On entre alors dans la deuxième phase, dite phase adiabatique car l'énergie est conservée. La solution automodèle de ce problème a été donnée par Sedov (1969) :

$$u_1(t) = 1.3\ 10^{15} \left(\frac{E_{51}}{n_e/3\ 10^{-3}}\right)^{1/5} t^{-3/5} \qquad (3_1)$$

où E est l'énergie libérée par la S.N. en unité de 10^{51} ergs
Cette solution est valable tant que les pertes radiatives sont peu importantes, typiquement jusqu'à ce que u atteigne la valeur :

$$u_{rad} \sim 1.2\ 10^{7}\ (E_{51})^{1/17} (n_e/3\ 10^{-3})^{2/17} \text{ cm/s} \qquad (4_1)$$

Mais la vitesse du son s a pour expression :

$$s = \sqrt{\gamma \frac{P_G}{\rho} + \frac{B^2}{8\ \pi\ \rho}} \qquad (5_1)$$

(où P_G est la pression du gaz et γ est le rapport des chaleurs spécifiques (5/3 pour un gaz monoatomique)). Avec les paramètres considérés, T = 7 10^5 °K et B = 10^{-6} G :

$$s = 1.4\ 10^{7} \text{ cm/s} \qquad (6_1)$$

Par conséquent, l'onde de choc dégénère en onde sonore avant de devenir radiative. La solution de Sedov est donc valable de :

$$t_o \sim 200\ \frac{(M_e/0.25\ M_\odot)^{5/6}\ (n_e/3\ 10^{-3})^{5/3}}{E_{51}^{5/2}} \text{ ans} \qquad (7_1)$$

jusqu'à

$$t_{max} \sim 6\ 10^{5} \left(\frac{E_{51}}{n_e/3\ 10^{-3}}\right)^{1/3} \text{ ans} \qquad (8_1)$$

Notons qu'ici encore, en supposant l'absence des nuages (Cox, 1979), nous avons considéré le cas le plus optimiste. Par contre, d'après la théorie développée par Mc Kee et Ostriker (1977), l'évaporation des nuages joue un rôle essentiel conduisant à un ralentissement plus rapide de l'onde de choc (voir quatrième partie).

II.2 - Force du choc

Au fur et à mesure que le choc ralentit, il devient plus faible ; le facteur de compression r suit l'évolution :

$$\frac{1}{r} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{(\gamma - 1)\left(\frac{u}{s}\right)^2} \qquad (9_1)$$

Pour $\gamma = 5/3$ on obtient :

$$r = \frac{4}{1 + 3\left(\frac{s}{u}\right)^2} \qquad (10_1)$$

r (t) est représenté sur la figure 1_1, ainsi que la différence entre l'indice spectral q ($q = \frac{3\ r}{r-1}$) et sa valeur pour un choc fort.

III - Energie à la coupure

Avant d'intégrer il faut préciser la valeur de λ. Ici encore nous prendrons le cas le plus optimiste, c'est-à-dire dans le cadre de la théorie quasi-linéaire $\lambda \sim r_e$.

Intégrant alors $\frac{dp}{dt}$ on obtient pour la première phase :

$$p(t) = p_o + 1{,}9\ 10^2\ Z\ \left(\frac{u_1}{2\ 10^9 \text{cm/s}}\right)^2\ B_{-6}\ \left(\frac{t}{\text{ans}}\right) \qquad (11_1)$$

où Z est la charge de la particule accélérée. Cette formule est valable jusqu'à $t = t_o$, où $p(t_o) = p_1 \cong 3{,}9\ 10^4$ GeV/c ; p_o étant négligeable devant p_1. Pour la deuxième phase :

$$p(t) = p_1 + 4\ 10^5\ Z\ \left(\frac{E_{51}}{n_e/3\ 10^{-3}}\right)\ B_{-6}\ (t_o^{-1/5} - t^{-1/5})\ \text{GeV/c} \qquad (12_1)$$

où t est exprimé en années. La variation de p en fonction du temps est schématisée sur la figure 2_1. On en déduit :

$$p_{max} \sim Z \cdot 10^5 \text{ GeV/c} \qquad (13_1)$$

Par conséquent, la dépendance de la coupure avec la charge de la particule amène à un changement de composition à la coupure. Ce changement va dans le sens de l'augmentation en éléments lourds observée aux environs de 10^5GeV (voir figure 1). Il est à noter également que p_{max} dépend très peu de t_{max} ; une diminution d'un facteur 100 de t_{max} n'affecte p_{max} que d'un facteur 1.6;les hautes énergies deviennent de plus en plus difficiles à atteindre pour deux raisons : λ augmente et u diminue.

Une intégration numérique, qui tient compte de la variation de r(t), n'apporte guère de modification sensible au résultat car c'est le rapport $\frac{1 - 1/r}{1 + r}$ qui intervient dans $\frac{dp}{dt}$ et il varie peu sauf vraiment dans les phases terminales qui, comme on l'a vu, ont peu d'influence sur p_{max}.

B - SPHÉRICITÉ DU CHOC

I - Effets de la sphéricité

Dans le modèle présenté dans le Préambule et conduisant à la bonne pente pour le spectre, le choc était supposé plan. En réalité pour une S.N., c'est l'équation en sphérique qui doit être considérée ; elle s'écrit quand D est indépendant de r :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{p}{3} \frac{\partial f}{\partial p} \left(2 \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r}\right) - u \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{2}{r} D \frac{\partial f}{\partial r} \qquad (14_1)$$

La sphéricité aura deux effets principaux : une perte de particules en amont du choc et une perte adiabatique d'énergie en aval du choc ; effets qui auront tendance à rendre le spectre plus abrupt. D'après l'équation (14_1), on peut se rendre compte

qu'en amont du choc l'effet de la sphéricité sera peu important tant que l'échelle des variations de f, $\frac{D}{u}$, est inférieure au rayon R de la S.N., ce qui est confirmé par l'étude de certaines solutions de l'équation (14_1), Krymsky, Kuzmin et Petukhov (1979), Prishchep et Ptuskin (1981), Drury (1982). Ce dernier a en particulier étudié le cas d'une S.N., évoluant selon la loi de Sedov. Alors les effets dus à la sphéricité sont négligeables tant que :

$$3 \frac{D_1}{u_1} + 4 \frac{D_2}{u_2} << R \qquad (15_1)$$

II - Comparaison avec la contrainte imposée par le temps de vie fini

Lorsque D est constant et u suit la loi de Sedov du paragraphe I, la contrainte sur l'énergie imposée par le temps de vie fini s'écrit pour $D_1 = D_2$:

$$D_1 < 4.2\ 10^{29}\ t_{max}^{-1/5} \left[\left(\frac{t_{max}}{t_o} \right)^{1/5} - 1 \right] / \text{Log} \left(\frac{p}{p_o} \right) \qquad (16_1)$$

alors que celle imposée par la sphéricité devient :

$$D_1 < 2.2\ 10^{29}\ t_{max}^{-1/5} \qquad (17_1)$$

Pour $p > 10^5$ GeV/c, la première condition est plus forte que la seconde. Nous supposerons qu'il en est de même lorsque D dépend de p (et par la suite de x). Aussi nous nous concentrerons sur la première contrainte.

- CONCLUSION

Dans cette partie, nous avons montré que la coupure en énergie provenait essentiellement du temps de vie fini de l'onde de choc de la S.N. et se situait dans le cas le plus optimiste aux environs de 10^5 GeV. Or, d'après le spectre observationnel, le mécanisme devrait expliquer les R.C.G., au moins jusqu'à l'énergie 10^5-10^6 GeV. Donc le mécanisme a plutôt des difficultés à expliquer les R.C. de haute énergie. Une étude plus réaliste de la coupure est intéressante. Pour commencer, une étude approfondie des coefficients de diffusion est nécessaire. En effet, ces derniers, bien que n'intervenant pas pour la solution stationnaire, sont tout à fait primordiaux pour l'étude de la coupure.

LÉGENDE DES FIGURES

Figure 1_1 - La figure 1_1 représente le rapport de compression r, (courbe en trait pointillé) et la différence Δ entre l'indice spectral q et sa valeur pour un choc fort (courbe en trait plein), en fonction de la vitesse du choc u_1, de son rayon R en parsecs et du temps en années.

Figure 2_1 - Cette figure représente l'évolution de p en fonction du temps. Courbe en trait plein : accélération uniquement dans la phase de Sedov. Courbe en trait pointillé : accélération dès la première phase d'évolution de la S.N. On peut remarquer que l'accélération est très rapide au départ puis sature vers 10^5 GeV.

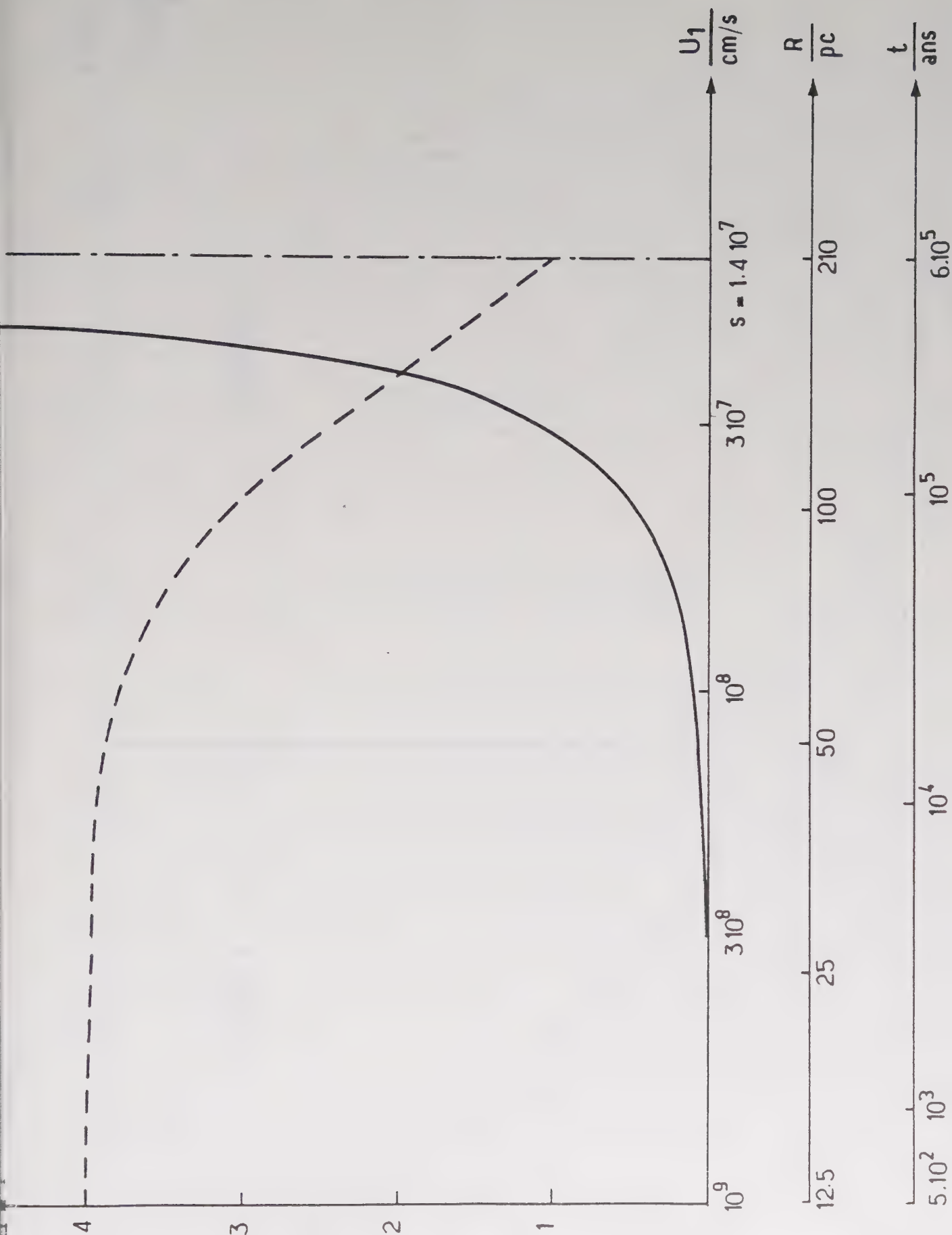

U1 / cm/s
R / pc
t / ans
s = 1.4 10^7
4
3
2
1
10^9
3 10^8
10^8
3 10^7
12.5
25
50
100
210
5.10^2
10^3
10^4
10^5
6.10^5

Figure 1

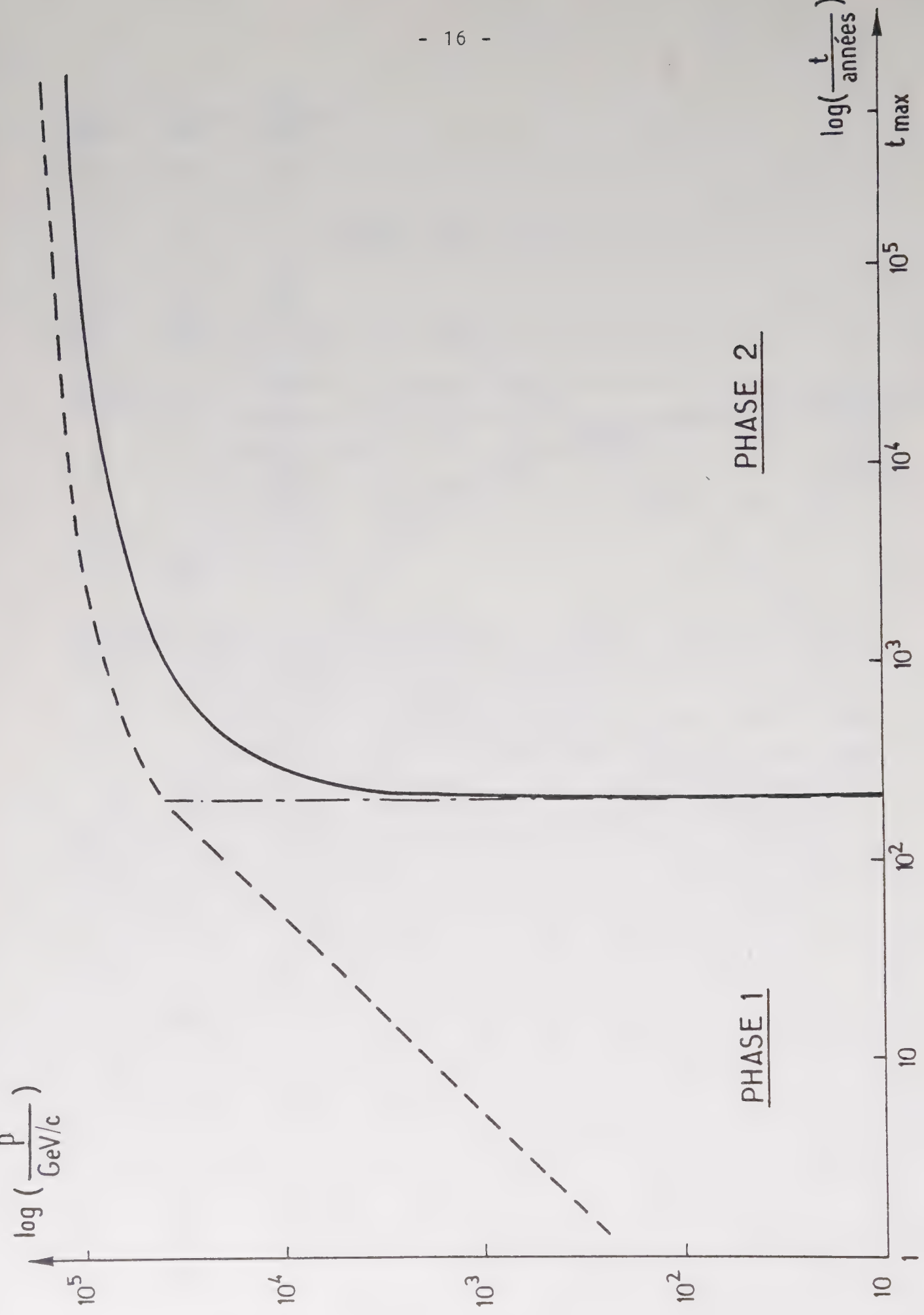

log (p / GeV/c)
10^5
10^4
10^3
10^2
10
1
PHASE 1
PHASE 2
10
10^2
10^3
10^4
10^5
t max
log(t / années)

Figure 2$_1$

DEUXIEME PARTIE

ETUDE DES COEFFICIENTS DE DIFFUSION

Le premier à s'être intéressé en détail aux coefficients de diffusion est Bell (1978a). Il argumenta, en extrapolant les observations faites au "bow shock" qu'en aval du choc, ce dernier devait engendrer de la turbulence. En amont pour des chocs de vitesse supérieure à la vitesse d'Afven v_A, les R.C.G. eux-mêmes peuvent nourrir la turbulence. Dans cette partie nous reprenons cette étude, en tenant compte de la turbulence préexistante dans le milieu interstellaire puis en examinant l'amortissement des ondes dans le milieu chaud ainsi que les interactions onde-onde.

A - TURBULENCE EN AMONT DU CHOC

I - Dépendance spatiale du coefficient de diffusion D_1

I.1 - Equation

Pour des chocs super-Alfeniques, les R.C. arrivant en amont du choc ont, dans le repère lié au milieu 1, une vitesse d'ensemble supérieure à la vitesse d'Alfven v_A. Ils peuvent alors fournir de l'énergie aux ondes hydromagnétiques avec lesquelles ils entrent en résonance, c'est-à-dire pour lesquelles le nombre d'onde k est égal au rayon de Larmor r_e de la particule (Wentzel, 1974, et bibliographie citée).

Si $\mathcal{F}$ d Log p est la densité d'énergie des ondes résonnantes avec les particules d'énergie comprise entre p et p + dp, normalisée par la densité d'énergie magnétique ambiante : $u_M = \frac{B^2}{8\pi}$, $\mathcal{F}$ obéit à l'équation :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \sigma \mathcal{F} + \Gamma \mathcal{F} = 0 \qquad (1_2)$$

où le taux de croissance des ondes σ vaut :

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} \; v_A \; \frac{p^4 \; v}{u_M \; \mathcal{F}} \; \frac{\partial f}{\partial x} \qquad (2_2)$$

Γ est le taux d'amortissement des ondes ; Γ inclut également les processus non linéaires de transfert d'énergie entre différentes régions du spectre d'onde.

Les ondes diffusent les particules ; dans le cadre de la théorie quasi-linéaire, le coefficient de diffusion D est donné par :

$$D = \frac{4}{3\pi} \frac{r_e \; v}{\mathcal{F}} \qquad (3_2)$$

L'équation pour f s'écrit alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_1 \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4}{3\pi} \; r_e \; v \; \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mathcal{F}} \; \frac{\partial f}{\partial x} \right) \qquad (4_2)$$

Cette équation ne tient pas compte des pertes d'énergie subies par les particules pendant l'accélération. Pour l'énergie cédée aux ondes c'est tout à fait justifié car l'énergie perdue pendant 1 cycle est très inférieure ($\sim \frac{v_A}{u_1} = 4 \; 10^{-2} \; \frac{B_{-6}}{u_8 \sqrt{n_e/3.10^{-3}}}$ fois plus petite) à l'énergie gagnée. Il en est de même pour les autres types de perte, Coulombienne et inélastique, du moins pour les particules relativistes (Völk, Morfill et Forman, 1981).

I.2 - Résolution

Négligeant le terme d'amortissement, la solution stationnaire de (1_2) et (4_2) s'obtient facilement ; en effet (1_2) s'intègre alors immédiatement pour donner :

$$\mathcal{F} - \mathcal{F}_\infty = \frac{4\pi}{3} \frac{v_A}{u_1} \; \frac{p^4 \; v \; (f - f_\infty)}{u_M} \qquad (5_2)$$

où $\mathcal{F}_\infty$ et f_∞ sont les valeurs de $\mathcal{F}$ et f pour $x = \infty$. Bell a alors pris $\mathcal{F}_\infty = 0$. Or à la fois des arguments théoriques (voir interactions onde-onde) et observationnels (Armstrong, Cordes et Pickett, 1981) prédisent l'existence dans le milieu interstellaire d'une turbulence qui, sur une grande gamme d'échelle de longueur (10^{11} cm à 10^{19} cm), a un spectre de la forme $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_o\ p^a$ où selon les théories a vaut 2/3 (Kolmogorov) ou 1/2 (Kraichnan) ; les observations n'étant pas assez précises pour trancher. Cette turbulence pourrait être une explication de la variation avec l'énergie du rapport noyaux primaires sur noyaux secondaires (voir la discussion dans Cesarsky, 1980). Les observations les plus récentes de ce rapport dans une gamme d'énergie de 0.7 GeV/n à 25 GeV/n faites par le satellite HEAO III favorisent alors la valeur $a = \frac{1}{2}$. Dans la suite nous prendrons l'indice prédit par Kraichnan. $\mathcal{F}_o$ est une constante mal déterminée dont la valeur se situe dans l'intervalle $(10^{-4}, 10^{-6})\ B_{-6}^{-1}$ $(GeV/c)^{1/2}$. Dans la suite la valeur 10^{-5} sera utilisée.

Nous avons donc pris la condition à la limite $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_k$; ce qui est la manière la plus simple d'incorporer cette turbulence. Une manière plus correcte serait d'inclure dans (1_2) les termes représentant la croissance de cette turbulence (voir paragraphe "interactions onde-onde"). Intégrant (4_2) compte tenu de (5_2) on obtient alors l'équation pour :

$$\mathcal{F}\,(\mathcal{F} - \mathcal{F}_\infty) = \frac{4}{3\,\pi}\,\frac{v}{u_1}\,r_e\,\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \qquad (6_2)$$

La dernière constante d'intégration du problème est déterminée par la condition $f\ (x = 0) = f_o$ (voir le Préambule). D'où :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty + \frac{\mathcal{F}_\infty}{\left(1 + \frac{\mathcal{F}_\infty}{\mathcal{F}_{Bell}(x=o)}\right) \exp\left(-\mathcal{F}_\infty\,\frac{x}{a}\right) - 1} \qquad (7_2)$$

et

$$f = f_\infty + \frac{\mathcal{F}_\infty}{\mathcal{F}_{Bell}(x=o)} \frac{(f_o - f_\infty)}{(1 + \frac{\mathcal{F}_\infty}{\mathcal{F}_{Bell}(x=o)}) \exp(-\mathcal{F}_\infty \frac{x}{a}) - 1} \qquad (8_2)$$

avec :

$$a = \frac{4}{3\pi} \frac{v}{u_1} r_e \qquad (9_2)$$

$$\mathcal{F}_{Bell}(x) = \frac{a}{(x_o - x)} \qquad (10_2)$$

$$x_o = \frac{1}{\pi^2} \frac{u_M}{v_A p^4 (f_o - f_\infty)} r_e \qquad (11_2)$$

I.3 - Applications numériques et discussion des résultats

Pour les applications numériques (faites en C.G.S.) nous considérons seulement l'injection des rayons cosmiques préexistants pour lesquels $f_\infty = f_{gal}\, p^{-4.75}\, H(p - p_o)$ $(erg.s)^{-3}$ avec $p_o \simeq 5.33\ 10^{-14}$ g.cm/s et $f_{gal} = 1.3\ 10^{-34}$ en unité C.G.S. Alors :

$$f_o \sim \frac{4 + \delta}{0.75 - \delta} f_{gal}\, p^{-(4+\delta)}\, p_o^{\delta - 0.75} \left[1 - \left(\frac{p}{p_o}\right)^{\delta - 0.75}\right] \qquad (12_2)$$

où on a posé $q = 4 + \delta$ et supposé $\delta < 0.75$. Pour p inférieur à quelques p_o, on déduit que $f_o - f_\infty$ est négatif ; ce qui conduit à x_o négatif ! Ceci provient du fait qu'en toute rigueur, il aurait fallu prendre dans σ la valeur absolue de $\frac{\partial f}{\partial x}$. Cette remarque étant faite, nous considérons ci-après p > quelques p_o et prendrons :

$$f_o - f_\infty \sim \frac{4 + \delta}{0.75 - \delta} f_{gal}\, p_o^{\delta - 0.75}\, p^{-(4+\delta)} \qquad (13_2)$$

On en déduit :

$$x_o \sim 3\ 10^{15}\ \frac{0.75 - \delta}{4 + \delta}\ (0.1)^{0.75-\delta}\ \left[P/(GeV/c)\right]^{1+\delta}\ \sqrt{n_e\ /3\ 10^{-3}} \qquad (14_2)$$

indépendamment de B et u. Pour $\delta = 0$ (correspondant à un choc fort) :

$$x_o \sim 10^{14}\ P/(GeV/c)\ \sqrt{n_e\ /3\ 10^{-3}} \qquad (15_2)$$

tandis que pour $\delta = 0.25$ (valeur qui est plus en accord avec les observations et qui, dans le diagramme 1_1, correspond à $u_1 \sim 6\ 10^7$ cm/s) :

$$x_o \sim 1.1\ 10^{14}\ \left[P/(GeV/c)\right]^{1.25}\ \sqrt{n_e\ /3.10^{-3}} \qquad (16_2)$$

$\mathcal{F}_{Bell}\ (x = o)$ vaut alors :

$$\mathcal{F}_{Bell}(x=o) = 0.015\ \frac{4+\delta}{0.75-\delta}\ (0.1)^{-0.75}\ \left[P/(GeV/c)\right]^{-\delta}\ \sqrt{\frac{1}{n_e\ 13.10^{-3}\ B_{-6}\ u_9}} \qquad (17_2)$$

- Pour $\delta = 0$, $\mathcal{F}_{Bell}\ (x = o) = \frac{0.45}{u_9}$.

- Pour $\delta = 0.25$, $\mathcal{F}_{Bell}\ (x = o) \sim \frac{7}{(u/6\ 10^7\ cm/s)}\ (P/GeV/c)^{-0.23}$

Donc même en injectant rien que les rayons cosmiques préexistants, $\mathcal{F}$ est grand, voisin ou supérieur à 1.

Quand $|x|$ est petit, la turbulence due aux R.C. domine, du moins tant que p est dans le domaine qui nous intéresse, à savoir $p < 10^5$ GeV/c (voir figure 1_2). Une autre façon de s'en convaincre est de considérer le paramètre qui donne l'échelle des distances $x_o'^{-1} = \left| \frac{1}{(f_o - f_\infty)} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=o} \right|$. Ce paramètre est important car c'est lui qui permet de vérifier si le choc peut être considéré comme plan (cf. Partie 1). Dans le cas étudié ci-dessus, on trouve :

$$x_o' = \frac{x_o}{1 + \frac{\mathcal{F}_\infty}{\mathcal{F}_{Bell\ (x=o)}}} \qquad (18_2)$$

Là encore $x_o' \sim x_o$ pour $p < 10^5$ GeV/c. Donc pour $|x|$ petit $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}_{Bell}$. Quand $|x|$ est grand, c'est-à-dire $>> \frac{a}{\mathcal{F}_\infty}$, il y a peu de particules, aussi comme on pouvait s'y attendre $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}_\infty$. La dépendance en x de $\mathcal{F}$ est bien approchée par $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{Bell}$ jusqu'à b tel que $\mathcal{F}_{Bell} = \mathcal{F}_\infty$, puis $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$ (voir figure 2_2 a, b). b est donné par la formule :

$$b = x_o \left(\frac{\mathcal{F}_{Bell\ (x=o)}}{\mathcal{F}_\infty} - 1\right) \qquad (19_2)$$

Notons que b est indépendant de B. La figure 3_2 donne la variation de $\frac{b}{x_o}$ en fonction de p.

Nous avons vu que dès que u est plus petit que quelques 10^8 cm/s, $\mathcal{F}$ devient > à 1. Cependant deux effets ignorés jusqu'à présent peuvent diminuer la valeur de $\mathcal{F}$: l'amortissement des ondes et les interactions onde-onde.

II - Amortissement des ondes

II.1 - Milieu neutre ou partiellement ionisé

Si le milieu dans lequel les ondes se propagent, est neutre ou partiellement ionisé, le taux d'amortissement est

grand (Kulsrud et Cesarsky, 1971) :

$$\Gamma \sim 10^{-9}\ n_H\ s^{-1} \qquad (20_2)$$

Aussi le mécanisme ne peut expliquer les R.C. de haute énergie qu'en prenant une densité de R.C. très supérieure ($\sim 10^4\ f_{Gal}$) à la normale (Bell, 1978). Mais alors le problème devient totalement non linéaire (au sens où la pression des R.C. devient dominante) et ne peut être traité avec le formalisme employé ; de plus, on risque d'avoir des problèmes énergétiques, toute l'énergie de la S.N. étant transferrée très vite au R.C. Par contre, nous allons voir que dans la phase coronale du milieu interstellaire, les ondes sont moins sujettes à l'amortissement.

II.2 - Milieu chaud

Dans ce milieu pour lequel v_A ($\sim 40\ B_{-6}$ km/s) est inférieure à la vitesse thermique des ions v_i ($\sim 170\ \sqrt{T_6}$ km/s), l'amortissement des ondes a été étudié par Völk et Cesarsky (1982) et vaut :

$$\Gamma_{N.S.} \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}}\ \frac{v_i}{c}\ \Omega\ (p/(GeV/c))^{-1}\ \mathcal{F} \qquad (21_2)$$

où Ω ($= \frac{eB}{p}$) est la fréquence de Larmor. Dès que $\mathcal{F}$ est supérieur $\frac{1}{\sqrt{8}}(\frac{v_i}{c})^2$, il y a saturation si bien que Γ devient :

$$\Gamma_S \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}}\ (\frac{v_i}{c})^2\ \Omega\ (p/(GeV/c))^{-1}\ \sqrt{\mathcal{F}} \qquad (22_2)$$

Nous sommes toujours dans le cas saturé ; il faut donc comparer Γ_S à σ. Pour la solution stationnaire σ peut s'écrire :

$$\sigma = \pi^2\ \frac{u_1}{r_e}\ \frac{v_A\ p^4\ (f - f_\infty)}{u_M} \qquad (23_2)$$

$\mathcal{F}$ et f décroissent avec x de la même manière ; donc $\sqrt{\mathcal{F}}$ décroît moins vite que f. Par conséquent, il y aura forcément un endroit x_A, où l'amortissement dominera. Pour $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{Bell}$ on obtient alors la relation :

$$\frac{x_A}{x_o} = \mathcal{F}_{Bell}\ (x=o) \quad \frac{9\ \pi}{2}\ \left(\frac{u_1}{v_i}\right)^4 - 1 \qquad (24_2)$$

La variation de $\frac{x_A}{x_o}$ en fonction de p est donnée figure 3_2. On constate que dès que p > quelques dizaines de GeV/c , x_A > b. Par conséquent, dans ce cas c'est $\mathcal{F}_\infty$ qui domine ; il faut alors comparer le terme d'amortissement au terme de croissance de $\mathcal{F}_\infty$ (interactions onde-onde) ; là encore l'amortissement est négligeable.

En conclusion, l'amortissement des ondes ne joue aucun rôle. Reste à examiner les interactions onde-onde.

III - Interactions onde-onde

III.1 - Equation

Soit F(k) dk l'énergie par cm^3 des ondes de nombre d'onde compris entre k et k + dk, normalisée par la densité d'énergie magnétique u_M ; le terme d'interactions onde-onde s'écrit alors de façon simplifiée, d'après une théorie phénoménologique (cf. Ph.D. de C. Cesarsky, 1971, et la bibliographie citée) :

$$\frac{d}{dk}\ \left(\frac{kF}{\tau}\right) \qquad (25_2)$$

Dans la théorie de Kraichnan τ vaut :

$$\tau = \frac{v_A\ \rho}{u_M\ F}\ k^{-2} \qquad (26_2)$$

C'est par ce type d'interactions que la turbulence formée à grande échelle se déverse vers les petites échelles pour donner le spectre de turbulence du milieu interstellaire.

Pour raccorder avec l'équation (1_2) il faut exprimer le terme d'interactions onde-onde en fonction de $\mathcal{F}(p)$ grâce aux relations $k = \frac{1}{r_e}$ et $F(k)\,dk = \mathcal{F}(p)\,d\,\mathrm{Log}\,p$, ce qui donne :

$$u_1 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \sigma \mathcal{F} - \frac{1}{r_e} p^2 \frac{d}{dp} \left[\frac{r_e}{p\tau} \mathcal{F}(p) \right] = 0 \qquad (27_2)$$

avec :

$$\tau = 2 \frac{r_e}{v_A} \frac{1}{\mathcal{F}(p)} \qquad (28_2)$$

Pour $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{Bell}$, le rapport du terme interactions onde-onde sur le terme de croissance $\sigma \mathcal{F}$ est de l'ordre de 1 en x = o quand u_1 vaut quelques 10^8 cm/s. Par conséquent, le terme d'interactions onde-onde va jouer un rôle important.

III.2 - Résolution de l'équation avec interactions onde-onde

Cette équation non linéaire peut être résolue numériquement, par exemple par la méthode des caractéristiques, mais avec la difficulté supplémentaire que nous avons des conditions aux limites à l'infini. Compte tenu des incertitudes sur la théorie, nous nous sommes contentés de chercher $\mathcal{F}$ en x = o, en négligeant cette fois le terme de convection. Nous prendrons comme solution finale la plus petite valeur de $\mathcal{F}$ trouvée dans l'un ou l'autre des deux cas.

Dans ces conditions la résolution se fait facilement analytiquement ; la constante d'intégration étant déterminée

par la condition $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$, quand p est grand. On obtient alors :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_o \sqrt{p} \left[1 + \left(\frac{p_1}{p}\right)^{1/2} \right] \qquad (29_2)$$

avec :

$$p_1 = \left[\frac{2\pi^2}{(1+2\delta)} \frac{4+\delta}{(0.75-\delta)} p_o^{\delta-0.75} f_{Gal} \frac{u_1}{u_M} \frac{1}{\mathcal{F}_o} p^{-\delta} \right]^2 \qquad (30_2)$$

Les courbes $\mathcal{F}$ (p) pour différentes valeurs de u sont tracées sur la figure 4_2. Les interactions onde-onde sont importantes quand u < 10^8 cm/s et empêchent $\mathcal{F}$ de devenir très supérieur à 1 pour p = 1 GeV/c.

B - TURBULENCE EN AVAL DU CHOC

I - Dépendance spatiale de D

En aval du choc, le choc lui-même génère de la turbulence. Mais cette turbulence va être aussi sujette aux interactions onde-onde ; négligeant les termes de viscosité l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \frac{v_A}{2\, r_e} p^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\mathcal{F}^2}{p}\right) \qquad (31_2)$$

avec pour condition à la limite :

$$\mathcal{F}_{(t = o,\ p)} = \mathcal{F}_o \qquad (32_2)$$

c'est-à-dire que nous supposons que le choc génère de la turbulence à toutes les échelles selon un spectre blanc.
$\mathcal{F}_o$ n'étant pas connu, toujours dans la ligne la plus optimiste que nous nous sommes fixés, nous prendrons pour les applications

numériques $\mathcal{F}_o = 1$. Cette équation aux dérivées partielles se résoud très bien par la méthode des caractéristiques. Les caractéristiques sont les courbes d'équation :

$$t = -\int \frac{1}{v_A \frac{eB}{c} \mathcal{F}} dp \qquad (33_2)$$

Le long de ces caractéristiques la variation de $\mathcal{F}$ s'écrit :

$$d\mathcal{F} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}}{p} dp \qquad (34_2)$$

équation qui s'intègre immédiatement pour donner :

$$\mathcal{F}(p, p_o) = \mathcal{F}_o \left(\frac{p}{p_o}\right)^{1/2}.$$

Reportant cette valeur dans (32_2) on obtient :

$$t = \frac{2}{\mathcal{F}_o} \frac{1}{v_A} \frac{c\, p_o}{eB} \left[1 - \left(\frac{p}{p_o}\right)^{1/2}\right] \qquad (35_2)$$

Pour avoir $\mathcal{F}(p,t)$, il suffit d'exprimer p_o en fonction de t et p à l'aide de (34_2). En tenant compte du fait que $t = \frac{x}{u_2}$ on a alors :

$$\mathcal{F}(p,x) = \frac{2\,\mathcal{F}_o}{1 + \sqrt{1 + 2\,\mathcal{F}_o \frac{v_A}{u_2} \frac{x}{r_e}}} \qquad (36_2)$$

L'échelle des longueurs x_D (définie par $\mathcal{F}(p, x_o) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(p, x = o)$) est donnée par :

$$x_D = 3\pi \frac{u_1 u_2}{v_A v} \frac{\mathcal{F}_{Bell}(x=o)}{\mathcal{F}_o} x_o \qquad (37_2)$$

II - Comparaison avec la turbulence amont

x_D est du même ordre que x_o pour $u_1 \sim 2.3\ 10^8$ cm/s si $\mathcal{F}_{Bell} \sim \mathcal{F}_o \sim 1$; mais alors l'essentiel de l'accélération a déjà eu lieu (cf. figure 2_1). Donc la dépendance en x du coefficient de diffusion en aval n'aura que peu d'effet ; d'autant plus que la décroissance est lente en $\sqrt{x}$ au lieu de x en amont. Ainsi le paramètre b tel que $\mathcal{F}(p,t) = \mathcal{F}_\infty$ vaut :

$$b = \frac{1}{2}\, r_e \frac{u}{v_A} \frac{1}{\mathcal{F}_o} \left[\left(2 \frac{\mathcal{F}_o}{\mathcal{F}_\infty} - 1\right)^2 - 1 \right] \qquad (38_2)$$

Pour $\mathcal{F}_o = 1$ et $\mathcal{F}_\infty = 10^{-5} \left[p/(\mathrm{GeV/c})\right]^{1/2}$, $b = 5\ 10^5\ u_8$ pc à 1 GeV/c ! très supérieur au rayon de la S.N. Donc ce paramètre n'interviendra pas. On peut aussi arguer que la turbulence $\mathcal{F}_\infty$ en aval est supérieure à sa valeur dans le milieu interstellaire, le choc ayant par exemple augmenté le mouvement turbulent des nuages. Ceci aura pour conséquence de diminuer d'autant l'effet de la dépendance en x de D_2.

- CONCLUSION

L'étude des coefficients de diffusion a permis de montrer qu'en amont du choc $\mathcal{F}(x = o, p = 1 \text{ GeV/c})$ était voisin de 1 même en n'injectant que les R.C. préexistants ; l'amortissement des ondes est négligeable dans le milieu coronal et les interactions onde-onde permettent à $\mathcal{F}$ de ne pas dépasser 1 quand u est inférieur à 10^8 cm/s. Nous avons également dégagé la dépendance en x de $\mathcal{F}$ compte tenu de la turbulence préexistante. En aval du choc nous avons conclu que la dépendance en x de $\mathcal{F}$ était peu importante ; le cas le plus optimiste est $\mathcal{F} = 1$.

Donc $\mathcal{F}$ étant voisin de 1, le seul effet qui peut avoir de l'influence sur E_{max} est la dépendance en x de D. Aussi dans la partie suivante nous traiterons le problème des solutions dépendantes du temps lorsque le coefficient de diffusion dépend de x.

LÉGENDE DES FIGURES

Figure 1_2 - La figure 1_1 représente la variation du log $[\mathcal{F}(x=o)]$ en fonction du log $[\, p/(GeV/c)\,]$, pour deux valeurs de u_1, trait plein $u_1 \sim 6\ 10^7$ cm/s et $\delta = 0.25$; trait pointillé $u_1 = 10^9$ cm/s et $\delta = 0$. Quand p est petit $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}_{Bell}$ et quand p est grand ($> 10^7$ GeV/c), $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}_\infty$.

Figure 2_2 - Les traits pleins de cette figure représentent la variation du log D en fonction du log $(x - x_o)$, pour deux valeurs de u : $u_1 = 10^9$ cm/s et $u_1 \sim 6\ 10^7$ cm/s. Figure 2_2a : p = 1 GeV/c ; Figure 2_2b : $p = 10^5$ GeV/c. Les traits pointillés représentent l'écart à D(x) quand on fait l'approximation : $D = D_{Bell}$ jusqu'à b, puis $D = D_\infty$.

Figure 3_2 - La figure 3_2 représente à la fois le log $(\frac{b}{x_o})$ (traits pointillés) et le log $(\frac{x_A}{x_o})$ (traits pointillés pointés) pour deux valeurs de u et de δ : $u_1 = 10^9$ cm/s et $\delta = 0$; $u_1 = 6\ 10^7$ cm/s et $\delta = 0.25$. On constate que $x_A > b$. Donc l'amortissement sera négligeable.

Figure 4_2 - La figure 4_2 représente le log $(\mathcal{F}(x = o))$ en fonction de log (p/(GeV/c)) pour trois valeurs de u_1 : 10^9 cm/s ; $2\ 10^8$ cm/s ; $6\ 10^7$ cm/s. Traits pointillés : $\mathcal{F}(x = o)$ quand le terme de perte est le terme d'interaction onde-onde. Traits pointillés pointés : $\mathcal{F}(x = o)$ quand le terme de perte est le terme de convection.

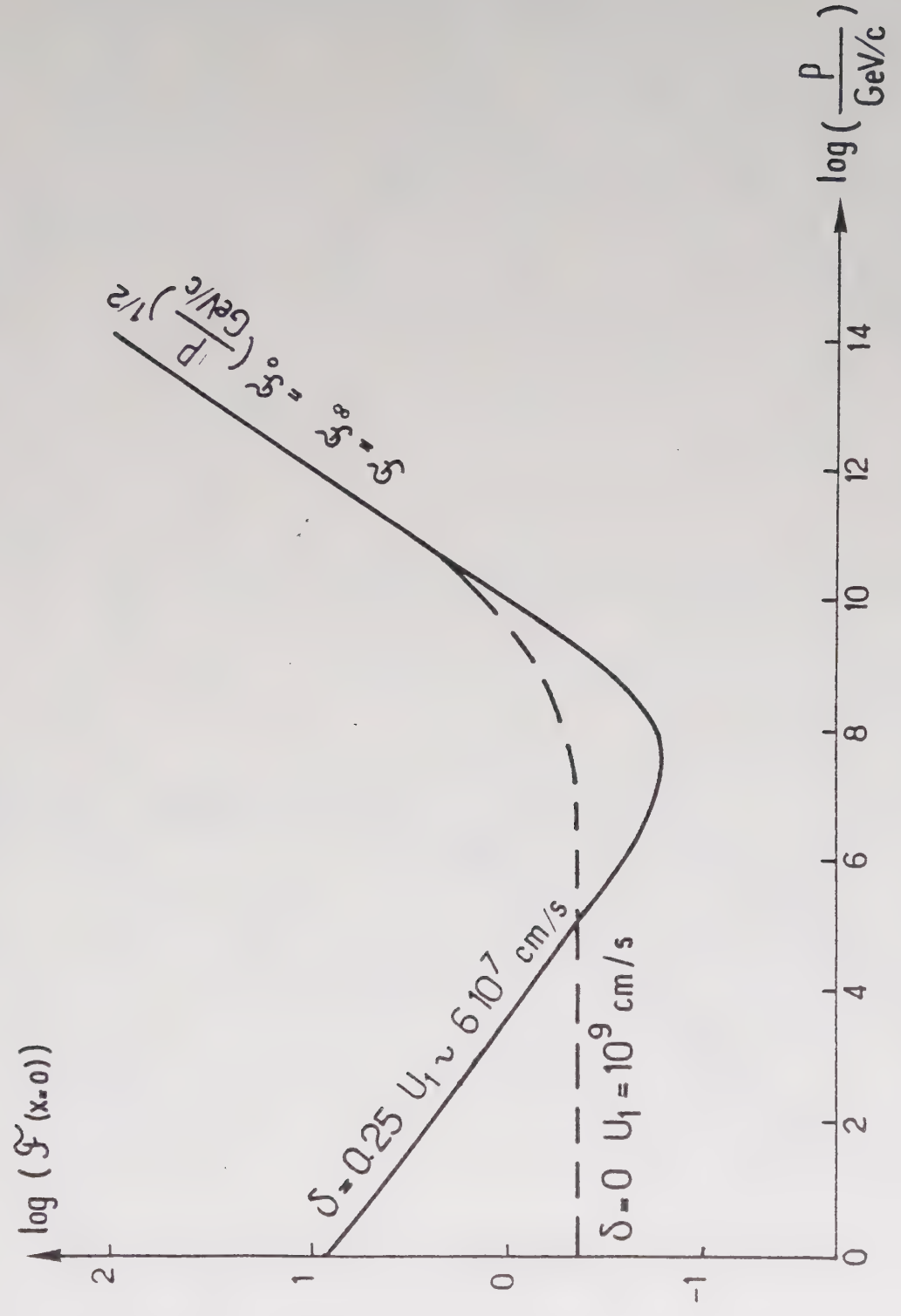
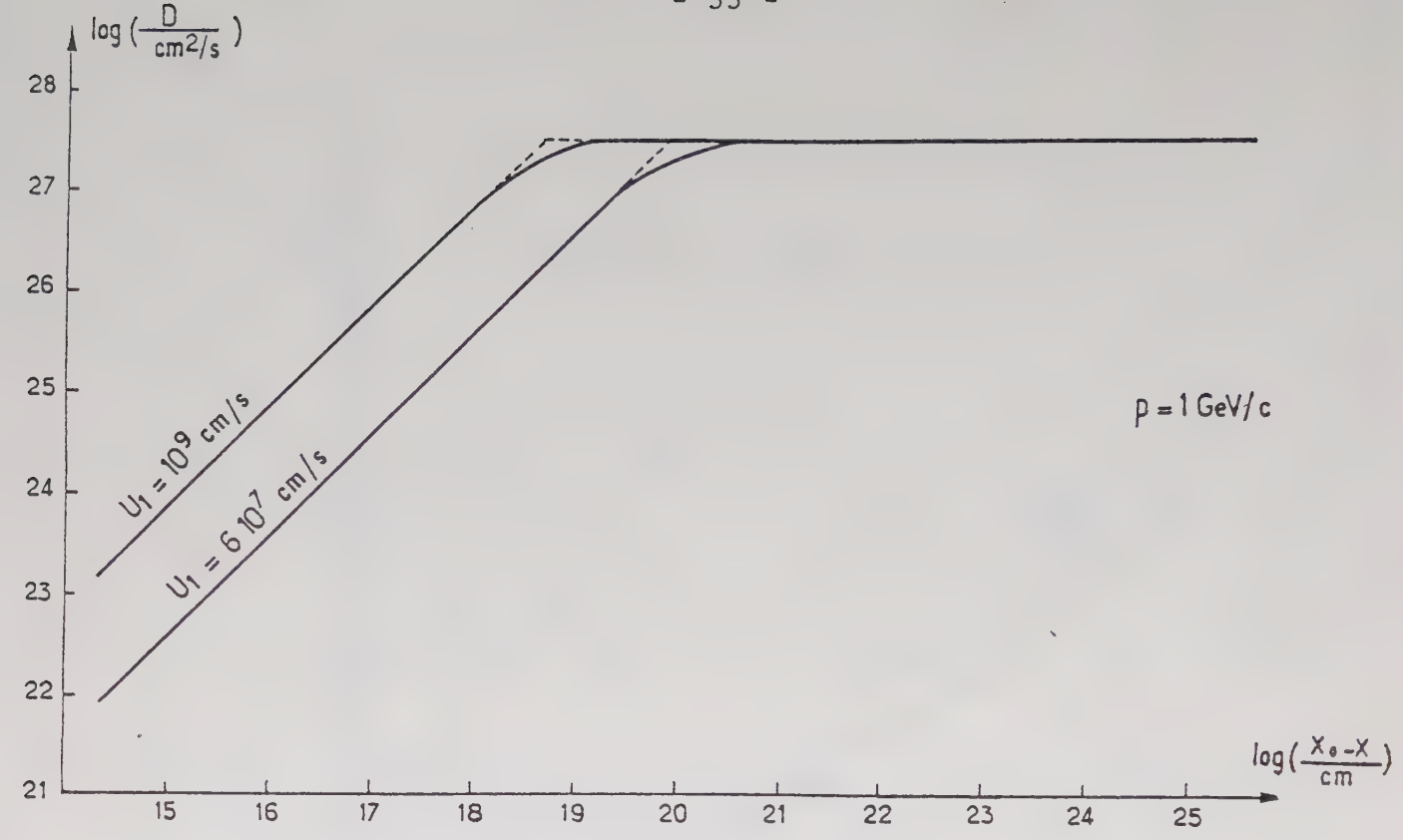

log ($\mathcal{F}_{(x=0)}$)
2
1
0
-1
0
2
4
6
8
10
12
14
log ($\frac{p}{GeV/c}$)
$\delta = 0.25$ $U_1 \sim 6\,10^7$ cm/s
$\delta = 0$ $U_1 = 10^9$ cm/s
$\delta = \delta_0 = \delta_0 \left(\frac{p}{GeV/c}\right)^{1/2}$

Figure 1_2


log (D / cm²/s)
28
27
26
25
24
23
22
21
$U_1 = 10^9$ cm/s
$U_1 = 6\,10^7$ cm/s
p = 1 GeV/c
log (X₀ - X / cm)
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25

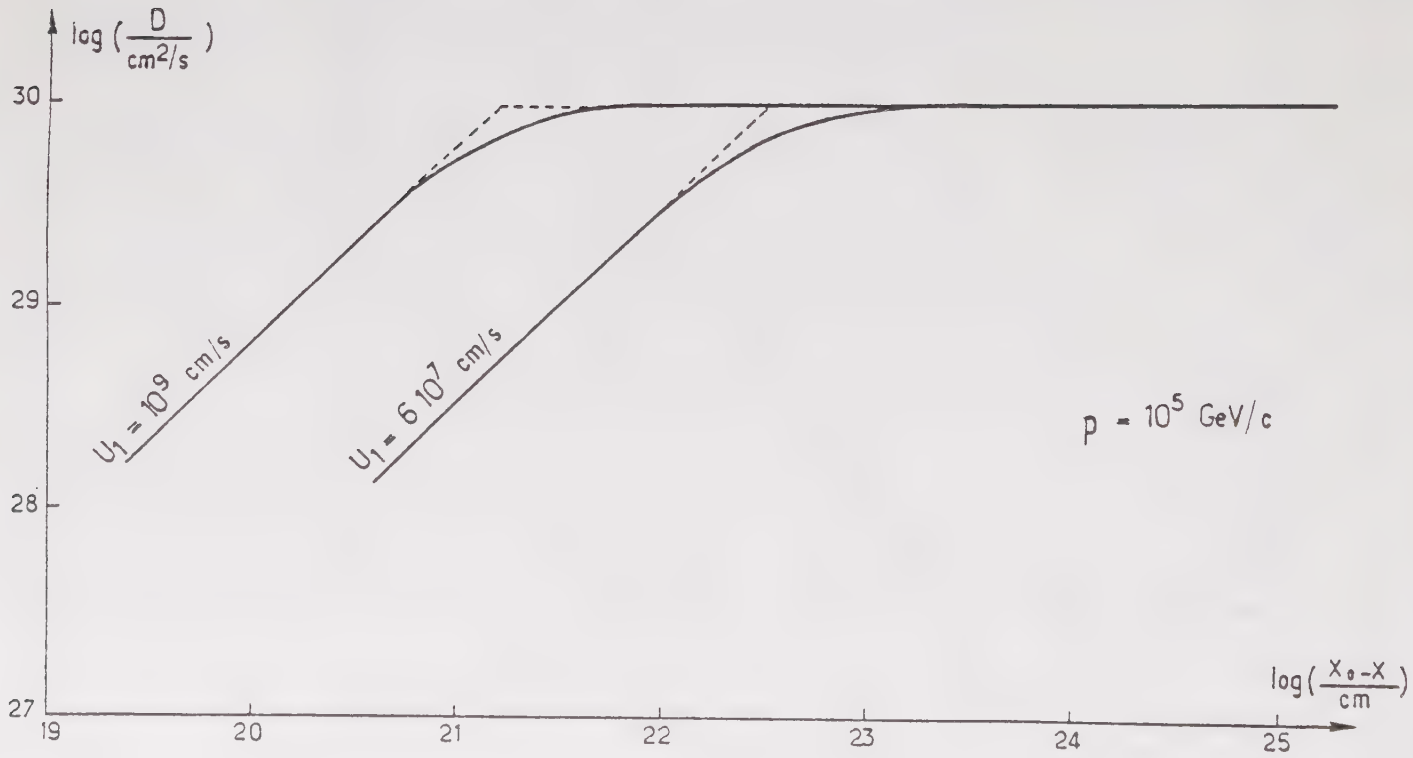

log (D / cm²/s)
30
29
28
27
$U_1 = 10^9$ cm/s
$U_1 = 6\,10^7$ cm/s
p = 10^5 GeV/c
log (X₀ - X / cm)
19
20
21
22
23
24
25

Figure 2_2

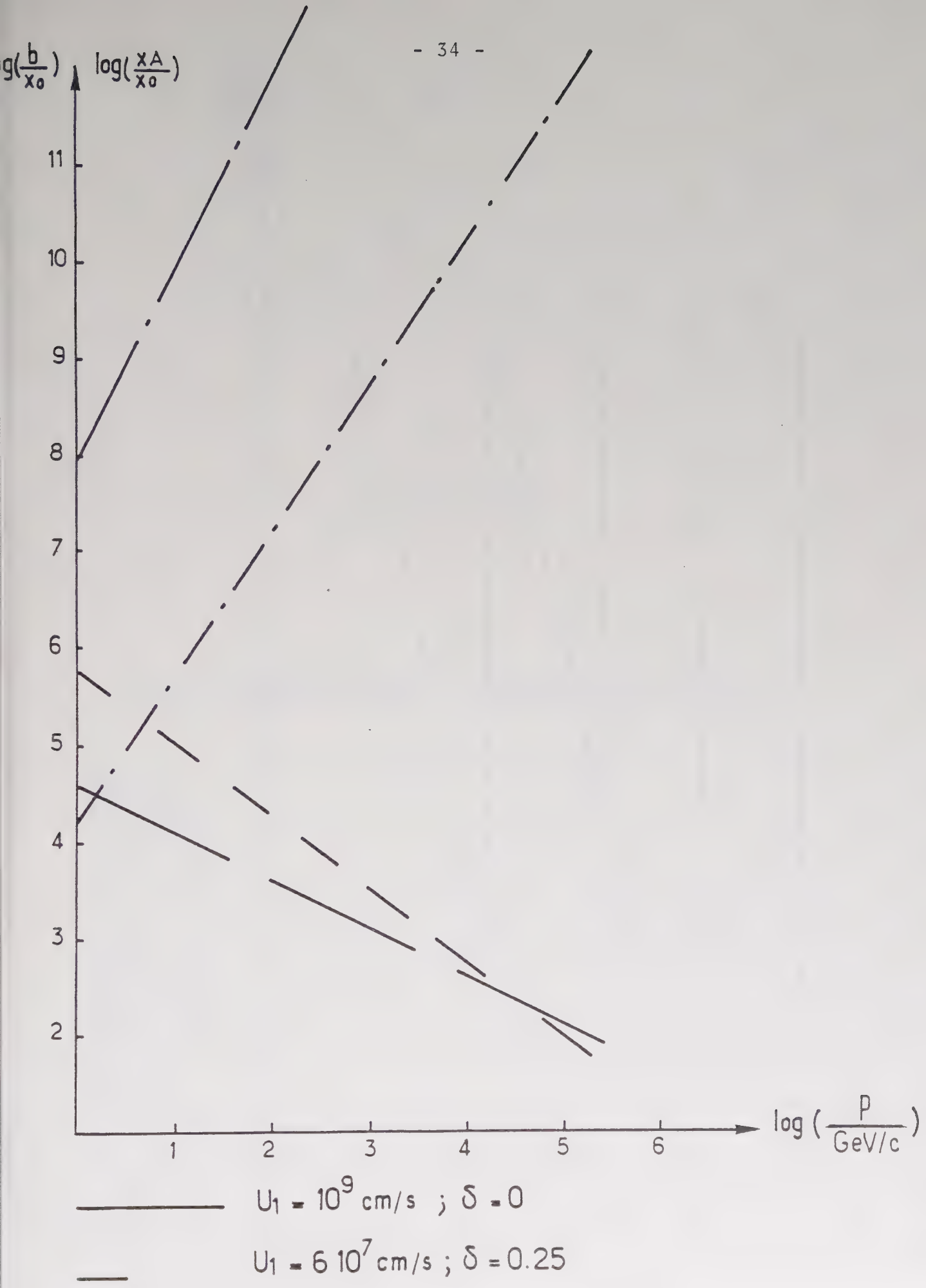

log(b/X0)
log(XA/X0)
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
2
3
4
5
6
log (P/GeV/c)
U1 = 10^9 cm/s ; δ = 0
U1 = 6 10^7 cm/s ; δ = 0.25

Figure 3_2

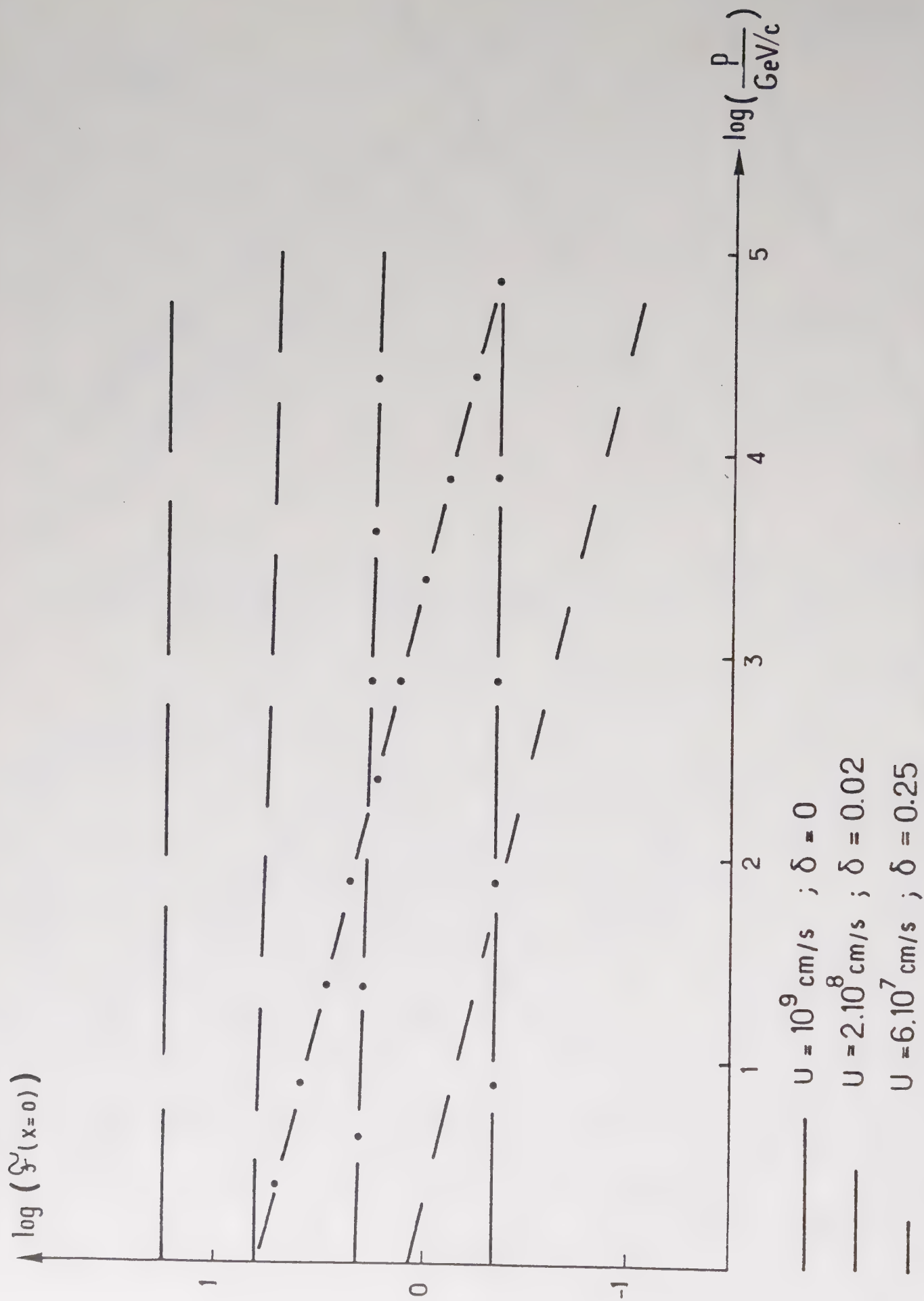

log ($\mathcal{F}_{(x=0)}$)
1
0
-1
1
2
3
4
5
log ($\frac{p}{GeV/c}$)
U = 10^9 cm/s ; δ = 0
U = 2.10^8 cm/s ; δ = 0.02
U = 6.10^7 cm/s ; δ = 0.25

Figure 4$_2$

TROISIEME PARTIE

ETUDE DYNAMIQUE INCLUANT LA DEPENDANCE SPATIALE DE D_1

Le problème des solutions dépendantes du temps peut être abordé de deux façons. La première est de résoudre l'équation de base (1), soit complètement, ce qui est possible lorsque D est constant (Krymsky et al., 1978 ; Toptygin, 1979), soit en cherchant seulement des solutions asymptotiques aux grands temps, ce qui a été fait lorsque D dépendait de p (Axford, 1981 ; Drury, 1982). On obtient alors un temps d'accélération global, temps pour que la solution atteigne un état stationnaire de p_o à p : $t_a = \int_{p_o}^{p} \frac{3}{\Delta u} \left(\frac{D_1}{u_1} + \frac{D_2}{u_2}\right) \frac{dp'}{p'}$. La deuxième approche, peut-être plus physique, due à Krymsky et al. (1979) est une approche séquentielle qui met l'accent sur l'aspect diffusion, responsable de la lenteur du phénomène. En effet, dans cette approche c'est le temps moyen d'un aller-retour à travers l'onde de choc qui est calculé à l'aide d'un problème de marche au hasard.

Dans cette partie nous généralisons le problème des solutions dépendantes du temps par les deux approches, en incluant la dépendance en x du coefficient de diffusion, déduite de la partie précédente. Nous avons vu qu'en amont lorsque les R.C. jouaient un rôle important pour la turbulence, le coefficient de diffusion à l'équilibre pouvait être approché de façon très correcte par $D(x) = u_1 (x_o - x)$ jusqu'à b puis D est constant (figures 2_2 a, b). Cette forme approchée va rendre les calculs faisables analytiquement. Le fait de considérer le coefficient de diffusion de la solution stationnaire n'est pas gênant, toujours avec l'argument de la coupure à l'énergie maximale. D'ailleurs nous montrerons dans la quatrième partie, qu'en première approximation le temps de croissance des ondes n'influence pas sensiblement le résultat. Comme

les calculs ne sont pas plus compliqués, dans la suite nous utiliserons une généralisation du coefficient de diffusion précédent. Nous prendrons $D(x) = u(x_o - \alpha x)$ jusqu'à b où $D(x = b) = D_b$ puis D constant ($= D_\infty$) (voir figure 1_3). Il sera intéressant d'étudier l'influence de α sur le temps d'accélération. En aval le coefficient de diffusion sera supposé indépendant de x.

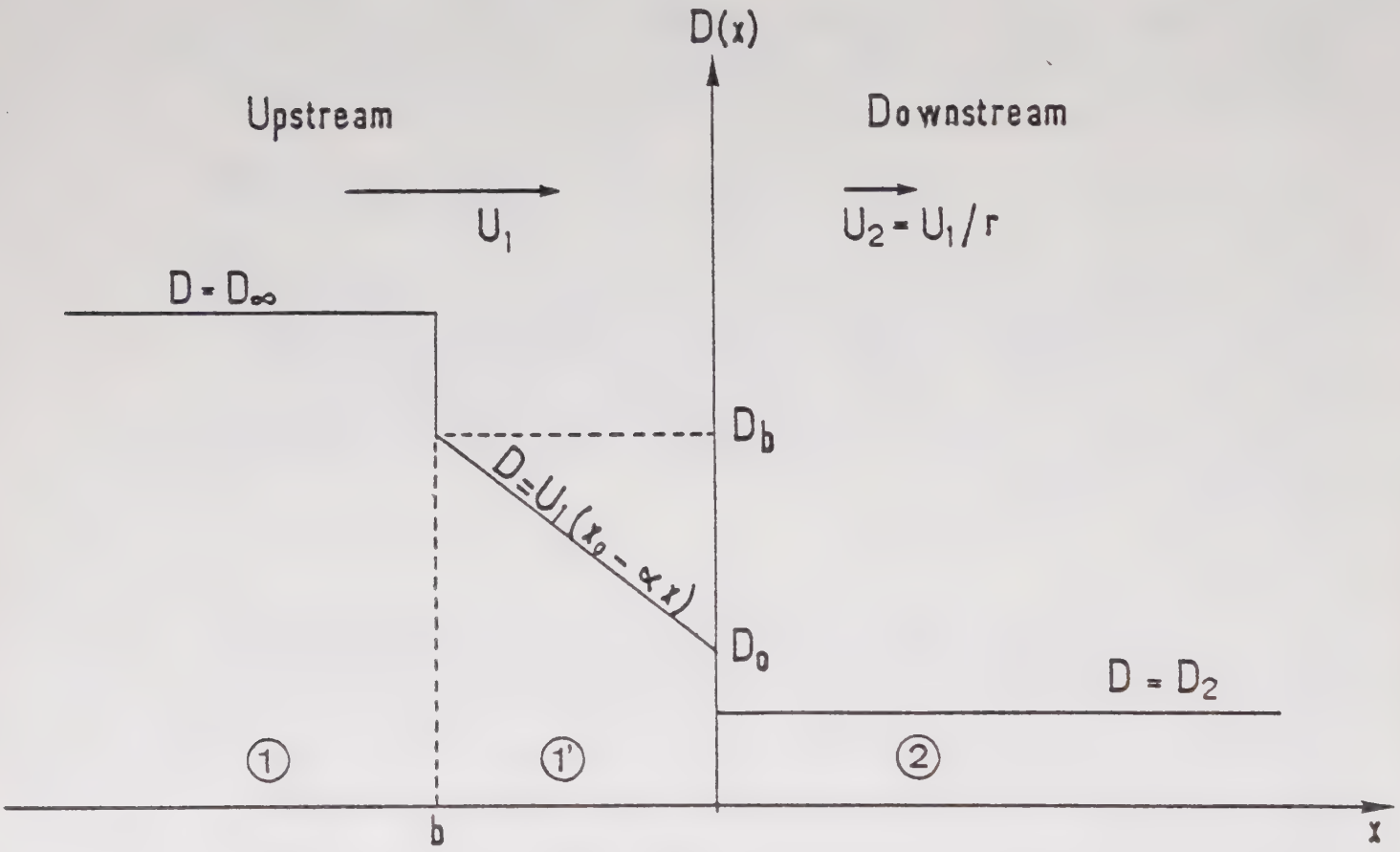


Figure 1_3 - Dépendance spatiale du coefficient de diffusion

A - SOLUTION ASYMPTOTIQUE DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT

I - Solution exacte dans l'espace de Laplace

L'équation de transport (1) , donnée dans le Préambule, se prête très bien à une étude par transformée de Laplace par rapport au temps, la variable conjuguée étant ω. La transformée de Laplace de f, notée $\overline{f}$, vérifie l'équation :

$$\omega \overline{f} = \frac{\partial}{\partial x}(D_i \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}) - u_i \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} - \frac{1}{3} p \frac{\partial \overline{f}}{\partial p} \Delta u \delta(x) + \frac{Q_o}{\omega} \delta(x)\delta(p - p_o) \quad (1_3)$$

où i vaut 1 (2) selon que x est < 0 (> 0). u_1 et u_2 sont supposés indépendants de x et de t. Nous supposons de plus que les particules sont injectées au choc, à une énergie et à un taux constant. Ceci nous permet de suivre facilement l'évolution temporelle de l'énergie des particules et ainsi de faire ressortir l'effet de la dépendance en x du coefficient de diffusion. Nous pourrions prendre en considération l'injection des R.C. préexistants en prenant un terme d'injection proportionnel à $\delta(x - x_1)\ \delta(t)$ puis en intégrant la solution sur x_1, x_1 variant de $-\infty$ à 0 (Toptygin, 1979).

La structure de l'équation nous amène à considérer deux régions $x > 0$ et $x < 0$ dans lesquelles l'équation (1_3) se réduit à l'équation de diffusion :

$$\omega \overline{f} = \frac{\partial}{\partial x} (D_i \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}) - u_i \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} \quad (2_3)$$

les conditions de passage entre les deux zones étant :

$$\overline{f}_1 (x = o) = \overline{f}_2 (x = o) \quad (3_3)$$

et

$$\left(D \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right)_1 (x=o) - \left(D \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right)_2 (x=o) = - \frac{\Delta u}{3} p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} (x=o) + \frac{Q_o}{\omega} \delta(p - p_o) \quad (4_3)$$

cette dernière condition étant obtenue, en intégrant l'équation (1_3) entre $\pm \varepsilon$ puis en faisant tendre ε vers 0.

La dépendance en x de D conduit à distinguer deux zones en amont du choc : $|x| > b$ et $0 < |x| < b$ notées 1 et 1' ; les conditions de passage étant simplement la continuité de $\bar{f}$ et de $D_1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}$:

$$\bar{f}_{1'} (x = b) = \bar{f}_1 (x = b) \quad (5_3)$$

$$\left(D \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right)_{1'} (x = b) = \left(D \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right)_1 (x = b) \quad (6_3)$$

Lorsque D est constant (zones 1 et 2) l'équation (2_3) s'intègre immédiatement pour donner :

$$\bar{f}_i = A_i \exp (u_{i,+} x) + B_i \exp (u_{i,-} x) \quad (7_3)$$

avec $u_{i,\pm} = \frac{u_i \pm \sqrt{u_i^2 + 4 \omega D_i}}{2 D_i}$ où i = 1 ou 2 selon la zone considérée ; $D_1 = D_\infty$. A_i et B_i sont les constantes d'intégration.

Dans la zone 1', le changement de variable $Z = \frac{2}{|\alpha|} \sqrt{\frac{\omega}{u_1} (x_o - \alpha x)}$ et le changement de fonction $V(Z) = \bar{f} Z^{1/\alpha}$ conduisent à une équation de Bessel modifiée d'ordre $\frac{1}{|\alpha|}$ pour V :

$$Z^2 \frac{d^2V}{dZ^2} + Z \frac{dV}{dZ} - \left(Z^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) V = 0 \quad (8_3)$$

La solution générale pour $\bar{f}$ s'écrit alors :

$$\bar{f}_1, = Z^{-1/\alpha} \left[A_1, \; I_{1/|\alpha|} (Z) + B_1, \; K_{1/|\alpha|} (Z) \right] \qquad (9_3)$$

avec

$$Z = \frac{2}{|\alpha|} \sqrt{\frac{\omega}{u_1} (x_o - \alpha x)} \qquad (10_3)$$

où $I_{1/|\alpha|}$ et $K_{1/|\alpha|}$ sont respectivement les fonctions de Bessel modifiées de première et de deuxième espèce.

Reste à calculer les six constantes d'intégration. Deux d'entre elles, A_2 et B_1 sont nulles afin d'empêcher une divergence de $\bar{f}$ quand $x \rightarrow \pm \infty$. Les conditions (3_2), (4_2), (5_2), (6_2) permettent de déterminer les quatre constantes restantes Etant linéaires en A et B, les équations (3_2), (5_2) et (6_2) ne posent aucune difficulté et permettent d'exprimer les différentes constantes d'intégration en fonction de B_2. (4_2) permet alors d'obtenir l'équation pour B_2 :

$$B_2 \; (- u_1 + F \; (p,\omega)) = \frac{\Delta u}{3} \; p \; \frac{\partial B_2}{\partial p} - \frac{Q_o}{\omega} \; \delta (p - p_a) \qquad (11_3)$$

où

$$F \; (p,\omega) = \frac{u_2}{2} \; (1 - \sqrt{1 + 4 \; \frac{\omega D_2}{u_2^2}}) + \frac{u_1}{2} \; (1 + \alpha \; Z_o \; \frac{M \; \dot{I}_o - R \; \dot{K}_o}{M \; I_o - R \; K_o}) \qquad (12_3)$$

Nous avons introduit les notations :

$$M = \sqrt{1 + \alpha^2 \; Z_b^2 \; \frac{D_\infty}{D_b}} \; K_b + \alpha \; Z_b \; \dot{K}_b \qquad (13_3)$$

$$R = \sqrt{1 + \alpha^2 \; Z_b^2 \; \frac{D_\infty}{D_b}} \; I_b + \alpha \; Z_b \; \dot{I}_b \qquad (14_3)$$

avec $Z_i = Z \; (x = i)$; $\dot{L}_i = \frac{dL_i}{dZ}$; $L_i = L \; (Z_i)$

où $L \in \{ I_{1/|\alpha|} , \; K_{1/|\alpha|} \}$

Pour $p > p_o$ l'équation (11_3) s'intègre immédiatement pour donner $\bar{f}\ (x = o, \omega)$ proportionnel à :

$$p^{-3\frac{u_1}{\Delta u}} \exp \int_{p_o}^{p} \frac{3}{\Delta u} F\ (p', \omega)\ \frac{dp'}{p'}$$

La constante de proportionnalité est déterminée par la contrainte :

$$B_2\ (p_o) = \frac{3}{\Delta u}\ \frac{1}{p_o}\ \frac{Q_o}{\omega}\ \delta\ (p - p_o) \qquad (15_3)$$

obtenue en prenant la limite $p \to p_o$ de l'intégration sur p de l'équation (11_3). D'où

$$\bar{f}\ (x = o, \omega) = f_o\ \frac{1}{\omega} \exp \int_{p_o}^{p} \frac{3}{\Delta u} F\ (p', \omega)\ \frac{dp'}{p'} \qquad (16_3)$$

II - Solution approchée dans l'espace des temps

II.1 - Exposé de la méthode

$\bar{f}\ (x = o, \omega)$ est le produit de deux termes $f_o\ \frac{1}{\omega}$ et $\exp \int_{p_o}^{p} \frac{3}{\Delta u} F\ (p', \omega)\ \frac{dp'}{p'}$; aussi sa transformée inverse de Laplace s'écrira :

$$f\ (x = o, t) = f_o \int_o^t \Phi\ (t')\ dt' \qquad (17_3)$$

où $\Phi\ (t')$ est la transformée inverse de Laplace de

$\exp \int_{p_o}^{p} \frac{3}{\Delta u} F\ (p', \omega)\ \frac{dp'}{p'}$ et s'écrit :

$$\Phi\ (t) = \frac{1}{2\ i\ \pi} \int_{-i\ \infty+1}^{+\ i\ \infty+1} \exp \left[t\ \omega - h\ (\omega, p) \right]\ d\omega \qquad (18_3)$$

où nous avons introduit la notation :

$$h(\omega,p) = -\int_{p_o}^{p} \frac{3}{\Delta u} F(p',\omega) \frac{dp'}{p'} \qquad (19_3)$$

et où la valeur de 1 est telle que toutes les singularités de la fonction à intégrer se situent à gauche de la droite x = 1 du plan complexe.

Un calcul approché de l'intégrale (18_3) peut être obtenu par la méthode d'intégration : "le long du contour le plus abrupt" (voir par exemple le livre de P. Hemici : "Applied and Computational Complex Analysis" et plus particulièrement le chapitre "Steepest Descent Method". Cette méthode a donné d'excellents résultats pour le cas D constant (Drury, 1982). Soit à intégrer la fonction exp g(ω) où g(ω) est analytique. La méthode consiste à faire un développement limité de la fonction autour du point ω_t (nous supposons ici pour simplifier qu'il n'y en a qu'un) pour lequel |exp g(ω)| (= exp [Re g(ω)]) est maximal. En effet, c'est cette zone qui aura le plus de poids dans le calcul de l'intégrale. Cette approximation sera d'autant plus correcte, que la partie réelle de g(ω) varie plus vite autour de ω_t . Pour cela, nous utilisons la possibilité laissée par le théorème de Cauchy de changer de contour d'intégration et choisissons le contour pour lequel Re g(ω) varie le plus rapidement possible. On montre que c'est le contour tel que la partie imaginaire de g(ω) est constante. Pour un tel contour le maximum de Re g(ω) pourra être cherché par la condition g'(ω) = 0.

II.2 - Application

a) Propriétés de h

α) Analycité

Pour pouvoir poursuivre il faut se donner la dépendance en p' de la fonction F (p', ω) ; c'est-à-dire la dépendance

en p des coefficients de diffusion. En effet, ce sont les caractéristiques de la fonction h (ω,p) qui conditionneront la suite, et pour avoir ces caractéristiques il faut en premier lieu intégrer (19_3). Pour simplifier nous supposerons les coefficients de diffusion constants. Alors :

$$h\ (\omega) = -\frac{3}{\Delta u}\ F\ (\omega)\ \text{Log}\ \left(\frac{p}{p_o}\right) \qquad (20_3)$$

Excepté le long de l'intervalle réel :

$$\omega < \text{Sup}\ \left[-\frac{u_2^2}{4\ D_2}\ ,\ -\frac{u_1^2}{4\ D_\infty} \right]$$

où se trouve la coupure des fonctions :

$$\sqrt{1 + 4\ \frac{\omega\ D_2}{u_2^2}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1 + \alpha^2\ Z_b^2\ \frac{D_\infty}{D_b}}$$

la fonction h(ω) est analytique. En effet, d'après les relations entre les fonctions de Bessel F(ω) peut s'écrire en fonction de $I_n(Z)$, $n \in \{ \frac{1}{|\alpha|}\ ,\ -\frac{1}{|\alpha|}\ ,\ \frac{1}{|\alpha|} + 1\ ,\ -\frac{1}{|\alpha|} - 1 \}$. Or $I_n(Z)$ peut se développer en série de Laurent :

$$I_n(Z) = (Z/2)^n \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(Z/2)^{2k}}{k!\ \Gamma\ (n + k + 1)} \qquad (21_3)$$

Le point Z = 0 peut amener une singularité. Nous avons donc fait un développement limité de h(ω) autour de ω = o au deuxième ordre (l'utilité du deuxième ordre se justifiera par la suite). Les calculs sont longs mais pas difficiles, après familiarisation avec le maniement des fonctions de Bessel. On obtient :

$$h(\omega) \underset{\omega \to o}{\sim} \omega\ t_a - \omega^2\ t_b^2 + O\ (\omega^4) \qquad (22_3)$$

t_b est donné dans l'Appendice de cette partie et t_a vaut :

$$t_a = \frac{3}{\Delta u} \left\{ \frac{D_2}{u_2} + \frac{D_o}{u_1} \frac{1}{(1-\alpha)} \left[1 + \left((1-\alpha) \frac{D_\infty}{D_b} - 1 \right) \right. \right.$$

$$\left. \left. (1 + \alpha \frac{b}{x_o})^{1 - 1/\alpha} \right] \right\} \text{Log } \frac{p}{p_o} \qquad (23_3)$$

Par conséquent $h(\omega)$ n'a pas de singularité au voisinage de $\omega = 0$. Notons que Z est proportionnel à $\sqrt{\omega}$. Mais cela n'introduit qu'une coupure artificielle car d'après le développement ci-dessus c'est Z^2 qui intervient dans $h(Z)$. D'ailleurs quand ω est réel < 0, $F(\omega)$ peut s'écrire :

$$F(\omega) = \frac{u_2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4 \omega D_2}{u_2^2}} \right) + \frac{u_1}{2} \left(1 + \alpha Z_o \frac{M_- \dot{J}_o - R_- \dot{Y}_o}{M_- J_o - R_- Y_o} \right) \qquad (24_3)$$

avec

$$M_- = \sqrt{1 - \alpha^2 Z_b^2 \frac{D_\infty}{D_b}}\, Y_b + \alpha Z_b \dot{Y}_b \qquad (25_3)$$

$$R_- = \sqrt{1 - \alpha^2 Z_b^2 \frac{D_\infty}{D_b}}\, J_b + \alpha Z_b \dot{J}_b \qquad (26_3)$$

J et Y sont respectivement les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce.

De plus, on constate facilement que le dénominateur ne s'annule jamais ailleurs. La fonction $h(\omega)$ est donc analytique excepté sur l'intervalle réel

$$\omega < \omega_o = \text{Sup} \left[-\frac{u_2^2}{4D_2}, \; -\frac{u_1^2}{4D_\infty} \right]$$

Par conséquent, nous devrons prendre $1 > \omega_o$.

β) Variations de h(ω)

Nous avons étudié les variations de h pour deux valeurs particulières de α : $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\alpha = 2$; ces cas sont plus faciles à traiter car les fonctions de Bessel s'expriment alors à l'aide des fonctions hyperboliques quand $\omega > 0$ ou trigonométriques quand $\omega < 0$.

Ainsi pour $\alpha = 2$, $Z_b \frac{M I_o - R K_o}{M I_o - R K_o}$ devient pour $\omega > 0$:

$$Z_b \frac{(\checkmark - 1) + 2 Z_b \operatorname{th} (Z_b - Z_o)}{(\checkmark - 1) \operatorname{th} (Z_b - Z_o) + 2 Z_b} \qquad (27_3)$$

et pour $\omega < 0$

$$Z_b \frac{(\checkmark - 1) - 2 Z_b \operatorname{tg} (Z_b - Z_o)}{(\checkmark - 1) \operatorname{tg} (Z_b - Z_o) + 2 Z_b} \qquad (28_3)$$

Pour $\alpha = \frac{2}{3}$, $Z_b \frac{M I_o - R K_o}{M I_o - R K_o}$ devient pour $\omega > 0$

$$Z_b \frac{(\checkmark - 1) \left[1 - \frac{1}{Z_b} \operatorname{th} (Z_b - Z_o)\right] + \frac{2}{3} Z_b}{(\checkmark - 1) \left[(\frac{1}{Z_o} - \frac{1}{Z_b}) + (1 - \frac{1}{Z_o Z_b}) \operatorname{th}(Z_b - Z_o)\right] + \frac{2}{3} Z_b \left[1 + \frac{1}{Z_o} \operatorname{th}(Z_b - Z_o)\right]} \qquad (29_3)$$

et pour $\omega < 0$

$$Z_b \frac{(\checkmark - 1) \left[1 - \frac{1}{Z_b} \operatorname{tg} (Z_b - Z_o)\right] - \frac{2}{3} Z_b}{(\checkmark - 1) \left[-(\frac{1}{Z_o} - \frac{1}{Z_b}) + (1 + \frac{1}{Z_o Z_b}) \operatorname{tg} (Z_b - Z_o)\right] + \frac{2}{3} Z_b \left[1 + \frac{1}{Z_o} \operatorname{tg}(Z_b - Z_o)\right]} \qquad (30_3)$$

où $\checkmark = \sqrt{1 + \alpha^2 Z_b^2 \frac{D_\infty}{D_b}}$

Après des calculs un peu longs, l'étude de la dérivée de ces fonctions montre que h est une fonction monotone croissante qui tourne sa concavité vers les $x < 0$, et telle que $\frac{dh}{d\omega} \to \infty$ quand $\omega \to \omega_o$ et $\frac{dh}{d\omega} \to 0$ quand $\omega \to \infty$.

Nous nous attendons à ce que ces propriétés restent valables pour les autres valeurs de α, notamment pour le cas intéressant $\alpha = 1$ situé entre $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\alpha = 2$. Ainsi la fonction $t\,\omega - h(\omega)$ aura un et un seul minimum, pour ω_t tel que $h'(\omega_t) = t$.

b) Valeur approchée de $\Phi(t)$

Développant $h(\omega)$ autour de ω_t, $\Phi(t)$ devient :

$$\Phi(t') \sim \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp\left[t\omega - h(\omega_t) - h'(\omega_t)\,(\omega-\omega_t) - \frac{1}{2}\,h''(\omega_t)\,(\omega-\omega_t)^2 \right] d\omega \qquad (31_3)$$

l'intégration se faisant le long du contour $\mathrm{Im}\left[t\omega - h(\omega)\right] = \mathrm{Cte}$, contour qui s'étend à l'infini ; mais l'intégration est plus facile sur le contour équivalent $\omega = \omega_t$ et donne :

$$\Phi(t') = \frac{1}{\sqrt{-\,2\,\pi\,h''(\omega_t)}} \exp\left[t\,\omega_t - h(\omega_t) \right] \qquad (32_3)$$

La variation de Reel $\left[t\omega - h(\omega)\right]$ est d'autant plus rapide autour de ω_t que t est plus grand. La solution est donc meilleure aux grands temps.

Comme h est une fonction dont la dérivée seconde ne s'annule pas $t\,\omega_t - h(\omega_t)$ n'a qu'un seul maximum pour $\omega_t = 0$ ($(\omega h' - h)' = 0 \Rightarrow \omega\, h'' = 0$, or $h'' < 0 \Rightarrow \omega = 0$). Donc $\Phi(t')$ est concentré autour de la valeur correspondante de t. Dévelop-

pant h autour de $\omega_t = 0$ on a vu que $h = \omega t_a - \omega^2 t_b^2 \Rightarrow$ $t = t_a - 2\,\omega\, t_b^2$. Donc pour $t \sim t_a$:

$$\Phi\,(t) \sim \frac{1}{t_b\ \sqrt{\pi}}\ \exp\left[-\,(t - t_a)^2/t_b{}^2\right] \qquad (33_2)$$

$\Phi\,(t)$ est centré sur t_a. Et si $t_b << t_a$, cette approximation peut être utilisée pour toutes les valeurs de t, donnant l'expression asymptotique du spectre au choc :

$$f\,(x = o,t) = f_o\left[1 - \mathrm{erfc}\left(\frac{t - t_a}{t_b}\right)\right] \qquad (34_3)$$

II.3 - Propriétés du nouveau paramètre dynamique t_a

La section précédente a montré que le nouveau paramètre dynamique global t_a était :

$$t_a = \frac{3}{\Delta u}\left\{\frac{D_2}{u_2} + \frac{D_o}{u_1}\,\frac{1}{(1-\alpha)}\left[1 + \left((1-\alpha)\,\frac{D_\infty}{D_b} - 1\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.(1 + \alpha\,\frac{b}{x_o})^{1\,-\,1/\alpha}\right]\right\}\ \mathrm{Log}\ \frac{p}{p_o} \qquad (35_3)$$

qui pour $\alpha = 1$ et $D_\infty = D_b$ devient :

$$t_a = \frac{3}{\Delta u}\left\{\frac{D_2}{u_2} + \frac{D_o}{u_1}\left[1 + \mathrm{Log}\,(1 + \frac{b}{x_o})\right]\right\}\ \mathrm{Log}\,(\frac{p}{p_o}) \qquad (36_3)$$

Comme on pouvait s'y attendre t_a est composé de deux termes : le premier correspond au temps passé en aval du choc et est le même que précédemment ; pour $\alpha > 0$ (respectivement < 0) le deuxième est plus grand (respectivement plus petit) que le terme obtenu quand D est constant et vaut $D_1\ (x = o)$; les résultats sont inversés si D est constant mais vaut D_∞.

II.4 - Validité de la solution

On peut également étudier l'influence de b sur t_a. Pour $\alpha << 1$, quand $b \to \infty$:

$$t_a \to \frac{3}{\Delta u} \left[\frac{D_2}{u_2} + \frac{D_o}{u_1 (1-\alpha)} \right] \text{Log} \frac{p}{p_o} \qquad (37_3)$$

On en déduit que l'effet de la dépendance en x de D est faible. Par contre, pour $\alpha > 1$, t_a diverge quand $b \to \infty$. Cela signifie simplement que la solution trouvée perd son sens. D'ailleurs la solution trouvée n'est valable que pour des temps supérieurs à b.c, afin que les particules aient pu ressentir les effets de b. Quand $b \to \infty$ la solution n'est valable que pour des temps infinis ! Si b grand mais fini et $t < b.c$, la solution du problème avec $b = \infty$ dans les équations de départ est valable. Revenant à l'équation initiale et posant $b = \infty$, $F(p,\omega)$ devient :

$$F(p,\omega) = \frac{u_2}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\,\omega\,D_2}{u_2^2}}\right) + \frac{u_1}{2} \left(1 + \alpha\, Z_o \frac{\dot{K}_o}{K_o}\right) \qquad (38_3)$$

Dans le cas $\alpha = 2$, il est facile de revenir par la méthode du contour le plus abrupt, dans l'espace des temps pour f :

$$f(x{:}o,t) \sim f_o \text{ erfc } \left(\frac{1}{2} \frac{3}{\Delta u} \sqrt{D_o} \text{ Log} \frac{p}{p_o} \frac{1}{t^{1/2}}\right) \qquad (39_3)$$

Solution valable seulement après un temps assez long pour que le temps passé en amont domine le temps passé en aval (D_2 n'est pas présent). Nous pouvons alors définir un temps d'équilibre : temps, disons par exemple, pour que 96 % des particules aient atteint l'état stationnaire de p_o à p. Alors :

$$t_a \sim t_{a,o} \quad 75 \quad \frac{u_1}{\Delta u} \text{ Log } \left(\frac{p}{p_o}\right) \qquad (40_3)$$

où $t_{a,o}$ est le temps d'équilibre lorsque D = constant = D_o.

Une caractéristique de ce temps d'accélération est que l'écart à $t_{a,o}$ augmente avec p. On peut donc dire grossièrement qu'un critère de validité de la solution où b intervient est :

$$t_a(b) < t_a\ (b = \infty) \qquad (41_3)$$

B - UN PROBLÈME DE MARCHE AU HASARD

I - Présentation du problème ; Lien avec le modèle

Nous nous intéressons ici au temps moyen que met une particule pour faire un cycle à travers le choc. Ce temps est la somme des temps moyens passés en amont et en aval. Calculer le temps passé d'un côté du choc, revient au problème de marche au hasard suivant :

Considérons un mur absorbant à travers lequel coule à la vitesse algébrique constante, u, un fluide de coefficient de diffusion D , $D = \frac{1}{2} \lambda v$ car pour des raisons de simplification nous travaillons à une dimension. Le mur est absorbant car chaque fois qu'une particule le heurte elle change d'énergie et n'intervient plus dans le calcul du temps moyen. A l'instant t = o, lâchons une particule test à la distance 1 du mur. Dans notre cas 1 sera le libre parcours moyen, λ_o, des particules près du mur. Deux questions se posent : Quelle est la probabilité pour que la particule atteigne le mur ? Et quel est le temps moyen pour le faire ?

Nous traitons le problème de façon continue. Soit W(x,t) dx la probabilité pour que la particule soit entre x et x + dx au temps t ; W vérifie l'équation :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial W}{\partial x}\right) - u \frac{\partial W}{\partial x} \qquad (42_3)$$

Les conditions aux limites sont : $W(x, t=o) = \delta(x-1)$ et $W(x=o, t) = 0$. La dernière condition est d'éviter une divergence de $W(x,t)$ à l'infini (déduite de $\int W(x,t)\, dx < 1$).

La probabilité $G(t)\, dt$ pour que la particule atteigne le mur entre t et t + dt est :

$$G(t)\, dt = \left(D \frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=o} dt \qquad (43_3)$$

La probabilité P pour que la particule atteigne le mur est :

$$P = \int_o^\infty G(t)\, dt \qquad (44_3)$$

Le temps moyen pour le faire est :

$$T \sim \frac{1}{P} \int_o^\infty t\, G(t)\, dt \qquad (45_3)$$

II - Application : coefficient de diffusion constant

Le cas, D = constant, peut être traité complètement (Cox et Miller, 1965, et Chandrasekhar, 1943, pour le cas u = o). Il donne :

$$G(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D}} \frac{1}{t^{3/2}} \exp - \left(\frac{1}{2\sqrt{D\, t}} + \frac{u}{2D} \sqrt{t}\right)^2 \qquad (46_3)$$

Alors :

$$P = \exp \left[- 1\ (u + |u|) \ /\ (2\ D) \right] \qquad (47_3)$$

Si $u < 0$, $P = 1$; si $u > 0$ et $1 = \lambda_o$, $P \sim 1 - 2\ u/v$ (au premier ordre en u/v) en accord avec les résultats de Bell (1978). Le nombre moyen de tours à travers le choc est :

$$\mathcal{N} = \sum_{n=o}^{\infty} n \left(1 - 2 \frac{u}{v}\right)^n = \frac{v}{u} \qquad (48_3)$$

Quant au temps moyen T, il vaut :

$$T = \frac{1}{|u|} \qquad (49_3)$$

En accord avec le résultat de Krymsky et al. (1979) qui, au lieu de considérer une diffusion spatiale, considéraient une diffusion temporelle. L'avantage de la présentation ci-dessus est qu'elle est directement généralisable au cas D(x). Notons la remarquable propriété de T, d'être indépendant du signe du u.

Dans le cas d'un coefficient de diffusion uniforme, il est facile d'obtenir avec cette méthode une solution dépendante du temps. Pour obtenir la fonction de distribution après n tours, dont la transformée de Laplace est $\overline{G}_n(\omega)$, nous avons résolu le problème précédent, mais en injectant comme fonction source, la probabilité d'atteindre le mur pour la $(n-1)^{ième}$ fois entre t et t + dt. La solution est rendue plus facile par le fait que si λ_o est indépendant de n (ce qui correspond à D indépendant de p) on a :

$$\overline{G_n}(\omega) = \overline{G_{n-1}}(\omega) \quad \overline{G_1}(\omega) \qquad (50_3)$$

avec

$$\overline{G_1}(\omega) = \exp\left(-\frac{u\,\lambda_o}{2D}\right) \exp\left(-\frac{\lambda_o}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{u^2}{4D} + \omega}\right) \qquad (51_3)$$

En prenant la transformée de Laplace inverse on obtient :

$$G_n(t) = \frac{n}{2\sqrt{\pi}} \frac{\lambda_o}{\sqrt{D}} \frac{}{t^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4D}\left(n\frac{\lambda_o}{\sqrt{t}} + u\sqrt{t}\right)^2\right] \qquad (52_3)$$

$N = \int_o^t G_n(t)\,dt$ est le nombre de particules qui ont atteintes le mur au temps t. Il vaut :

$$N = \frac{1}{2} \exp\left(-n \frac{u}{v}\right) \left\{ \exp\left(n \frac{u}{v}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{D}} \sqrt{t} + \frac{n \lambda_o}{2\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right.$$

$$\left. + \exp\left(-n \frac{u}{v}\right) \left[2 - \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{D}} \sqrt{t} - \frac{n \lambda_o}{2\sqrt{D}} \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right] \right\} \qquad (53_3)$$

La fonction erreur erfc (y) varie rapidement de 1 à 0 approximativement quand y varie de 0 à 4. Aussi quand n est grand, une petite variation autour de 1 du rapport $t/(n \lambda_o/u)$ est suffisante pour que N varie de 0 à environ 1. La dispersion relative est donc faible et N est proportionnel à $H(t-n \lambda_o/u)$. Notons qu'ici nous n'avons pas pris en considération le changement de vitesse au choc, car nous nous sommes intéressés à la diffusion spatiale et pas à l'accélération.

III - Application : coefficient de diffusion $D_1(x)$

Lorsque D dépend de x, comme sur la figure 1_3, le problème devient plus compliqué. Les calculs sont semblables à ceux du A, la transformée de Laplace de G(t), $\overline{G}(\omega)$ vaut :

$$\overline{G(\omega)} = \left(\frac{Z_o}{Z_1}\right)^{\frac{|u|}{u} \frac{1}{\alpha}} \frac{F_1}{F_o} \qquad (54_3)$$

où

$$F_i = \left[\sqrt{1 + \alpha^2 \frac{D_\infty}{D_o} Z_b^2}\, K(Z_b) + \alpha Z_b \frac{dK}{dZ}(Z_b) \right] I(Z_i)$$

$$- \left[\sqrt{1 + \alpha^2 \frac{D_\infty}{D_o} Z_b^2}\, I(Z_b) + \alpha Z_b \frac{dI}{dZ}(Z_b) \right] K(Z_i) \qquad (55_3)$$

Nous avons laissé tomber l'indice $1/|\alpha|$ de K et I.

Il n'est pas utile ici de revenir dans l'espace des temps. En effet, les règles de somme donnent : $P = G(\omega = o)$ et $T \sim \frac{1}{P} \frac{dG}{d\omega} (\omega = o)$. Aussi :

$$P = (1 + \alpha \frac{1}{x_o})^{-(1 + \frac{u}{|u|}) \frac{1}{\alpha}} \qquad (56_3)$$

Comme prévu, $P = 1$ pour $u < 0$ et $P \sim 1 - 2\,u/v$ pour $u > 0$ et $1 = \lambda_o$.

Quant à T il vaut :

$$T = \frac{1}{|u|} \frac{1}{1-\alpha} \left\{ 1 + \left[\frac{D_\infty}{D_b} (1-\alpha) - 1 \right] \frac{x_o}{1} (1 + \alpha \frac{b}{x_o})^{1 - \frac{1}{\alpha}} \left[(1 + \alpha \frac{1}{x_o})^{1/\alpha} - 1 \right] \right\} \qquad (57_3)$$

qui, pour $1 = \lambda_o$, se réduit à :

$$T = \frac{\lambda_o}{|u|} \frac{1}{1-\alpha} \left\{ 1 + \left[\frac{D_\infty}{D_b} (1-\alpha) - 1 \right] (1 + \alpha \frac{b}{x_o})^{1 - \frac{1}{\alpha}} \right\} \qquad (58_3)$$

Nous retrouvons le résultat obtenu au paragraphe A, au facteur 3/4 près car nous avons travaillé à 1 dimension. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet d'avoir un temps d'accélération quand u varie lentement avec t. Si $b \to \infty$, $T \to \infty$, car le petit nombre de particules qui a besoin d'un long temps pour revenir au choc, compte beaucoup. Aussi ce temps moyen ne nous donne plus d'information sur la dynamique du système.

- CONCLUSION

Dans cette partie nous avons généralisé l'étude des solutions depéndantes du temps au cas où le coefficient de diffusion dépendait de x ; $D_1(x) = u_1 (x_o - \alpha x)$ jusqu'à b puis $D_1 = D_\infty$; D_2 = constant. Nous avons fait cette étude de façon classique à l'aide de l'équation de transport, mais aussi en développant un problème de marche au hasard qui permet de déterminer le temps moyen d'un cycle, qui pour $\alpha = 1$ s'écrit :

$$T_{cycle} = \frac{4}{3} \left\{ \frac{\lambda_2}{u_2} + \frac{\lambda_1}{u_1} \left[1 + \text{Log} \left(1 + \frac{b}{x_o}\right) \right] \right\}$$

Nous allons utiliser le nouveau temps d'un cycle pour déduire une énergie de coupure plus réaliste.

APPENDICE

Développant h au deuxième ordre autour de $\omega = o$, on obtient la dispersion t_b qui, pour $\alpha > 0$, est donnée par la formule :

$$t_b^2 = \frac{3}{\Delta u} \left\{ \frac{D_2^2}{u_2^3} + \frac{D_o^2}{u_1^3} \xi \right\} \text{Log} \left(\frac{p}{p_o}\right)$$

avec

$$\xi = -\frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{D_\infty}{D_b} \left(\frac{Z_o}{Z_b}\right)^{2\left(\frac{1}{\alpha} - 2\right)} \left[-\frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \alpha \left(\frac{Z_b}{Z_o}\right)^{2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)}\right) \right.\right.$$

$$\left. + \left(\frac{Z_o}{Z_b}\right)^2 - \alpha \frac{D_\infty}{D_b} \right] + \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{2\alpha - 1} \left(1 - \left(\frac{Z_p}{Z_o}\right)^{2\left(\frac{1}{\alpha} - 2\right)}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{Z_b}{Z_o}\right)^2 - \left(\frac{Z_o}{Z_b}\right)^{2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)} \right] - \frac{1}{1-\alpha} \left[1 + \left((1-\alpha) \frac{D_\infty}{D_b} - 1\right) \left(\frac{Z_o}{Z_b}\right)^{\frac{2}{\alpha} - 2} \right]$$

$$\left. \times \left[\frac{1}{1-\alpha} \left(-1 + \alpha \left(\frac{Z_o}{Z_b}\right)^{2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)}\right) + \left(\frac{Z_b}{Z_o}\right)^2 \left(1 + \alpha \frac{D_\infty}{D_b} \left(1 - \left(\frac{Z_o}{Z_b}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)\right)\right] \right\}$$

Pour $\alpha = 1$, elle se réduit à :

$$= 2 \left[1 + \frac{D_\infty}{D_b} \left(1 + \frac{D_\infty}{D_b}\right) \right] \left(\frac{Z_b}{Z_o}\right)^2 - \text{Log}^2 \left(\frac{Z_b}{Z_o}\right) - 2 \frac{D_\infty}{D_b} \text{Log} \left(\frac{Z_b}{Z_o}\right)$$

$$- 2 - 2 \frac{D_\infty}{D_b} - \left(\frac{D_\infty}{D_b}\right)^2$$

QUATRIEME PARTIE

ENERGIE REALISTE DE LA COUPURE

Cette partie reprend le calcul de l'énergie maximale atteinte durant le temps de vie de l'onde de choc, sous un jour plus réaliste. La dépendance en x et en t du coefficient de diffusion a été prise en compte ainsi que le modèle de Mc Kee et Ostriker pour l'évolution des S.N. Différentes solutions au problème des hautes énergies sont envisagées.

A - PROBLÈME DES HAUTES ÉNERGIES

I - Influence de la dépendance spatiale de D

Incorporant le nouveau temps moyen d'un cycle, calculé précédemment, dans l'approximation $\frac{dp}{dt} \sim \frac{\Delta p}{T_{cycle}}$ on obtient :

$$\frac{dp}{dt} = (1 - \frac{1}{r}) \frac{u_1^2 / c\, p}{r\, \lambda_2 + \lambda_1 \left[1 + \mathrm{Log}\, (1 + \frac{b}{x_o}) \right]} \qquad (1_4)$$

Intégrant (1_4), compte tenu de la dépendance de $\frac{b}{x_o}$ en fonction de p ($\frac{b}{x_o} \sim 10^5 \left[p/(\mathrm{GeV}/c) \right]^{-1/2}$, voir deuxième partie) et prenant toujours $\lambda = r_e$, on obtient pour la première phase d'évolution de la S.N. :

$$3.4\, (p - p_o) - \frac{1}{10} (p\, \mathrm{Log}\, p - p_o\, \mathrm{Log}\, p_o) = 1.9\, 10^2\, (t/\text{années}) \qquad (2_4)$$

et pour la deuxième phase :

$$3.4\, (p - p_1) - \frac{1}{10} (p\, \mathrm{Log}\, p - p_1\, \mathrm{Log}\, p_1) = 1.4\, 10^5 \left(1 - (\frac{t_o}{t})^{1/5}\right) \qquad (3_4)$$

Dans les deux formules précédentes p est en GeV/c. L'évolution de p en fonction de t est schématisée figure 1_4. La nouvelle valeur de E_{max} est maintenant $\sim 5\ 10^4$ GeV. Bien que le temps passé en amont du choc soit multiplié par un facteur 8 environ, E_{max} n'est divisé que par un facteur 2,4 à cause du facteur 4 devant λ_2.

II - Dépendance temporelle de D

En général le temps de croissance des ondes $1/\sigma$ est pris égal à D/u ; temps qui correspond à l'état stationnaire (voir les formules 1 et 1_2) pour lequel le spectre des R.C. est complètement développé. Par comparaison avec le temps d'accélération t_a qui, lorsque D est constant, s'écrit $4 \frac{D}{u_1} \text{Log} (\frac{p}{p_o})$, il serait tentant de conclure que l'influence du temps de croissance des ondes sur l'énergie maximale est faible. En réalité, la solution stationnaire nous donne le taux de croissance maximum. En effet, dans l'état non stationnaire le nombre de R.C. est plus faible. Nous avons donc entrepris l'étude temporelle de la croissance des ondes. C'est un problème compliqué qui, grâce à des approximations, peut être simplifié et se traite numériquement.

Les équations de départ, écrites avec n(p,x,t) tel que n dp dx est le nombre de particules, d'énergie comprise entre p et p+dp, situées entre x et x + dx, sont :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial n}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x} (u\ n) + \frac{1}{3} \frac{\partial\ (np)}{\partial p} \Delta u\ \delta\ (x) \qquad (4_4)$$

et $$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \sigma\ \mathcal{F} - u \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \Gamma\ \mathcal{F} \qquad (5_4)$$

avec $$\sigma = \frac{4\ \pi}{3} v_A \frac{p^2\ u}{u_M\ \mathcal{F}} \frac{\partial n}{\partial x} \qquad (6_4)$$

Ces équations non linéaires couplées sont difficiles à résoudre sous leur forme générale. Pour simplifier, nous avons

cherché à éliminer la dépendance spatiale, en faisant des approximations parfois un peu grossières.

II.1 - Equations approchée pour les particules

Intégrant l'équation (4_4) sur x on obtient :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = n\,(-\infty)\,u_1 + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial p}\left[n(o)\,p\right]\,\Delta u \qquad (7_4)$$

où N est le nombre total de particules du système. N peut se décomposer en deux parties ; les particules qui retraversent l'onde de choc N_1 et celles qui s'en échappent N_2. On peut relier approximativement N_1 et $\frac{\partial N_2}{\partial t}$ à n (x=o). En effet, on fait l'approximation que toutes les particules N_1 passent pendant le temps d'un cycle à travers l'onde de choc, on a alors :

$$\frac{1}{4}\,n_o\,c = \frac{N_1\,(1 - 4\,\frac{u_2}{c})}{T_{cycle}} \qquad (8_4)$$

D'autre part, pendant le temps d'un cycle, $4\,\frac{u_2}{c}\,N_1$ particules quittent le système, d'où :

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = 4\,\frac{u_2}{c}\,\frac{N_1}{T_{cycle}} \qquad (9_4)$$

L'équation approchée s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{c}{4}\,\frac{t_{cycle}}{(1 - 4\,u_2/c)}\,n(o)\right] = -\,n(o)\,u_2 + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial p}\left[n(o)p\right]\,(u_2-u_1) + n\,(-\infty)\,u_1 \qquad (10_4)$$

équation dont on peut vérifier qu'elle donne la bonne solution stationnaire ainsi que les solutions dépendantes du temps connues, évidemment sans la dispersion puisque nous avons moyenné par

T_{cycle}. Cette équation n'est intéressante que quand la formule $T_{cycle} = \frac{4}{3}\left(\frac{\lambda_1}{u_1} + \frac{\lambda_2}{u_2}\right)$ peut être utilisée, c'est-à-dire quand T_{cycle} varie peu avec le temps. Nous n'avons pas inclu la dépendance spatiale de D dans T_{cycle}.

II.2 - Equation approchée pour les ondes

Pour $\mathcal{F}$ nous avons supposé que n(x,t) prenait très vite sa pente d'équilibre en x=o : $\frac{\partial n}{\partial x} \sim \frac{n}{x_o}$ avec $x_o = \frac{D}{u} = \frac{4}{3\pi}\frac{c}{u_1}\frac{1}{\mathcal{F}} r_e$.

La nature de cette approximation peut être déduite du problème de marche au hasard précédent où nous injectons constamment des particules en λ_o, au taux H. En effet, en convoluant par H, le résultat obtenu pour l'injection $\delta(x - \lambda_o)$ on obtient n(x,t).

On en tire le rapport x_o sur $x_{o,equ}$ (x_o à l'équilibre) en $x = \lambda_o$ et pour $t = \frac{\lambda_o}{u}$:

$$\frac{x_o}{x_{o,equ}} = \frac{1}{x_{o,equ}}\left[\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x}\right]^{-1}_{x = \lambda_o,\ t = \frac{\lambda_o}{u}} = \sqrt{2\pi\frac{u}{v}} \qquad (11_4)$$

Pour u grand ce rapport vaut ~ 0.5 et l'approximation est valable. Par contre, pour u petit par rapport à c, elle devient beaucoup moins bonne, mais comme elle a tendance à rendre le terme de croissance plus petit, elle sera justifiée par le résultat.

De plus, nous avons remplacé les termes d'amortissement et d'interactions onde-onde par la loi $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0$ quand $\mathcal{F} > 1$. Ceci simplifie le problème et nous avons vu que ces interactions conduisent effectivement à $\mathcal{F}$ voisin de 1. En résumé :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \frac{u_1}{r_e} \frac{v_A}{u_M} p^2 n \qquad \text{pour } \mathcal{F} < 1$$
$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0 \qquad \text{pour } \mathcal{F} > 1 \qquad (12_4)$$

II.3 - Résolution numérique

Les équations (7_4) et (12_4) peuvent s'intégrer numériquement par la méthode des caractéristiques. Les caractéristiques des équations sont pour $\mathcal{F}$:

$$t = Cte \qquad (13_4)$$

et pour n :

$$\int \frac{T_{cycle}}{p} dp = \int \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{u_1}{c} dt \qquad (14_4)$$

Pour amorcer et éviter les problèmes au voisinage de p_o où n(p) croît très rapidement, nous avons pris au départ pour $\mathcal{F}$: $\mathcal{F} = 1$ jusqu'à p_1 (variable) puis $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$ pour $p > p_2$, les deux zones étant raccordées par un polynôme ; et pour n, le n correspondant au $\mathcal{F}$ précédent.

Le résultat obtenu pour E_{max} est sensiblement le même que lorsque D est indépendant du temps. Notons que là encore l'effet est atténué par le 4 devant λ_2.

Nous concluons que le mécanisme d'accélération n'est pas sensiblement ralenti par la croissance des ondes.

III - Influence de l'évaporation des nuages

III.1 - Evolution de la S.N.

Mc Kee et Ostriker (1977), ont élaboré un modèle de milieu interstellaire à trois composantes : le milieu coronal, les nuages

chauds et leur coeur froid. Le milieu est entretenu par l'explosion des S.N. Lors de leur calcul d'évolution d'une S.N. dans ce milieu, ils ont considéré l'évaporation des nuages. Cette évaporation est saturée tant que :

$$\sigma_o = \left(\frac{T}{(1.54\ 10^7)}\right)^2 \frac{1}{n\ a_{pc}\ \Phi} >> 1 \qquad (15_4)$$

où a_{pc} est la taille typique des nuages en parsec, et Φ un paramètre d'efficacité qui dépend du champ magnétique et est pris ici égal à 1. Dans cette phase la S.N. évolue comme si elle se propageait dans un milieu de densité uniforme, environ 0.1 particule/cm^3 (seule la partie chaude du nuage est évaporée). Ainsi la première phase avec $u \sim 2.10^9$ cm/s, dure jusqu'à $t \sim 68$ ans. Lors de la deuxième phase la vitesse de choc sera :

$$u \sim 6.6\ 10^{14} \left(\frac{E_{51}}{n_e/0.1}\right)^{1/5} t^{-3/5} \qquad (16_4)$$

Compte tenu de (15_4) et de la relation $T = 10^{10.08}\ R^{-3}\ E_{51}\ n^{-1}$, cette solution est valable jusqu'à R égal à 29 pc. C'est-à-dire $t_1 = 2.2\ 10^4$ ans. Ensuite l'évaporation ne sera plus saturée, la densité diminuera et u ralentira moins vite ; u sera proportionnel à $t^{-2/5}$. La constante de proportionnalité est déterminée ici par la condition de continuité entre phases. Ainsi :

$$u \sim 2.8.10^{12}\ t^{-2/5} \qquad (17_4)$$

Solution valable jusqu'à $t \sim 6\ 10^5$ ans (u est alors égal à s).

III.2 - Energie maximale

La variation de p en fonction du temps, compte tenu de la nouvelle évolution de la S.N. et de la dépendance spatiale de D, est représentée sur la figure 2_4. Pour les phases 1 et 2, les formules sont les mêmes que précédemment, aux coefficients

numériques près. Pour la troisième phase l'intégration de $\frac{dp}{dt}$ donne :

$$3.4\ (p - p_2) - \frac{1}{10}\ (p\ \mathrm{Log}\ p - p_2\ \mathrm{Log}\ p_2) = 1.4\ 10^4 \left[\left(\frac{t}{t_1}\right)^{1/5} - 1 \right] \qquad (18_4)$$

où p_2 est $p(t_1)$.

L'énergie maximale atteinte durant le temps de vie de la S.N. n'est plus que de $2\ 10^4$ GeV.

B - SOLUTION ?

I - Diffusion plus forte ?

Nous avons vu que le libre parcours minimum des particules dans le cadre de la théorie quasi-linéaire était $\lambda = r_e$. Donc si on veut se libérer de cette contrainte, il faut sortir du cadre. Pour $\mathcal{F} > 1$ aucune théorie n'est disponible ; le problème devient trop compliqué car il n'est plus possible de faire des développements limités. Il est cependant très probable que l'effet des "perturbations" ne sera plus une simple diffusion. Völk et Mc Kenzie (1981) ont émis l'idée que les perturbations créées par les R.C. de haute énergie pourraient piéger les R.C. de basse énergie et ainsi rendre le mécanisme intermittant.

II - Evolution différente du choc de S.N. ?

II.1 - Halo

Axford (1980) a suggéré que le halo galactique pourrait être parcouru par des ondes de choc de très grandes dimensions ; ces dernières résulteraient de l'accélération d'ondes de choc de S.N. qui ont atteint le bord du disque galactique et s'accélèrent en rencontrant le gradient de densité.

Le comportement d'une onde de choc dans un milieu de densité $n = n_o \exp(-Z/H)$, à la température T_o, a été étudié par Chevalier et Gardner (1974). Il y aura réaccélération de l'onde de choc si :

$$T_o > \sim 10^7 \left(\frac{E_o}{10^{51}\ \text{ergs}}\right) \left(\frac{n_o}{10^{-3}\ \text{cm}^{-3}}\right)^{-1} \left(\frac{H}{100\ \text{pc}}\right)^3 \qquad (19_4)$$

Or l'échelle des variations, H, dans le halo est grande, de l'ordre de quelques kiloparsecs (Spitzer, 1956). Par conséquent, le halo n'aura pas d'influence sensible sur l'évolution de la S.N.

II.2 - Choc non linéaire

Jusqu'à présent nous avons considéré que les R.C. étaient des particules test. Or leur pression peut devenir dominante (Axford, 1977). Le problème devient alors non linéaire et très compliqué. Le choc peut devenir plus efficace r = 7 car γ est alors plutôt 4/3 (valeur pour un milieu relativiste). On obtient alors un facteur multiplicatif < 2. Mais pour tirer p_{max} il faudrait connaître l'évoluttion de la S.N., compte tenu de la pression des R.C.

III - Plusieurs S.N.

La probabilité pour que les R.C. soient réaccélérés par d'autres S.N. a été étudié par Blandford et Ostriker (B. et O.) (1980) lorsque la vitesse de diffusion des R.C., $v_{C.R.}$, à travers l'espace interstellaire est faible par rapport à la vitesse du choc. Le temps moyen de rencontre vaut alors :

$$t_{sh} = \frac{3\ V_G}{4\ \pi\ \Sigma\ R^3} \qquad (20_4)$$

où V_G est le volume du disque galactique ($\sim 1.4\ 10^{12}\ pc^3$) et

Σ le taux d'explosion des S.N. ($\sim$ 1/30 par an). B. et O. ont pris $R = R_c$, rayon maximal de la phase adiabatique de la S.N. qui, dans le modèle de Mc Kee et Ostriker (1977), vaut $\sim$ 180 pc ; t_{sh} vaut alors $2\ 10^6$ ans. Notons sa variation très sensible avec R_c. Or le temps de fuite de la galaxie des R.C. à 1 GeV vaut $\sim 2\ 10^7$ ans. On aura donc une dizaine de réaccélérations à basse énergie. A haute énergie, B. et O. prédisent une augmentation de l'importance de la réaccélération car la vitesse de diffusion des R.C. augmente ; $v_{C.R.}$ est proportionnel à $E^{+\ 0.5}$. Il est vrai en effet qu'aux hautes énergies, $v_{C.R.}$ devient supérieur à la vitesse de la S.N. et le temps moyen de réaccélération devient :

$$t_{sh} = \frac{3\ V_G}{4\ \pi\ \Sigma R^3}\ \frac{u_{S.N.}}{v_{C.R.}} \qquad (21_4)$$

et est donc inversement proportionnel à l'énergie puissance 1/2. Mais le temps de fuite des R.C. est aussi inversement proportionnel à l'énergie puissance 1/2. Donc le nombre de réaccélérations est constant. De plus, nous avons vu dans la première partie que pour que le choc soit encore efficace à haute énergie il fallait que son rayon ne soit pas trop grand (si R est supérieur à 50 pc l'énergie n'est multipliée que par un facteur inférieur à 1.6). Prenant R = 50 pc, le nombre de réaccélérations est inférieur à 1.

Donc la réaccélération par plusieurs S.N. sera peu importante.

IV - Ailleurs : Vents ?

Les autres candidats à l'accélération sont les chocs terminaux de vent stellaire. Dans ce cas la région choquée est à l'intérieur du choc. Le niveau de turbulence peut donc être élevé des deux côtés du choc, indépendamment des R.C. Supposant une vitesse du choc de $3\ 10^8$ cm/s et une durée de vie de 10^5 ans, la contrainte due au temps de vie fini du choc conduit à :

$$E_{max} \sim 5\ 10^6\ Z\ (B/10^{-5}\ G)\ (u/3.10^8\ cm/s)^2\ GeV \qquad (22_4)$$

où B est le champ magnétique au choc (un champ de 10^{-5} G au choc correspond à un champ de 100 G à la surface du choc, si le rayon du choc est 10^6 fois celui de l'étoile).

Nous savons que pour des raisons énergétiques les vents stellaires seuls ne peuvent maintenir le niveau des R.C. (Montmerle et Cesarsky, 1981a). Cependant, il semble intéressant d'envisager la possibilité pour les vents de contribuer dans une large mesure aux R.C. de haute énergie. Une configuration possible est montrée sur la figure 3_4. Nous avons pris le spectre différentiel n(p) proportionnel à p^{-2} pour les vents et $p^{-2.3}$ pour les Supernovae. L'efficacité de la conversion de l'énergie des vents stellaires aux R.C. est de 14 %,obtenu à partir de la formule $0.008 \log (E_{max}/E_o)$ (Montmerle et Cesarsky, 1981b). Le rapport des puissances entre S.N. et vents est de 20. Cela implique que l'efficacité de l'accélération pour les S.N. est de 7 %. On aurait alors une explication du renflement dans le spectre à 10^5 - 10^6 GeV (voir figure 1).

Mais une objection importante contre l'accélération par les vents a été soulignée par Axford (1981) ; en effet, en extrapolant jusqu'au choc (situé environ à 5 pc de l'étoile) la tendance à l'enroulement de B, on arrive à un champ magnétique perpendiculaire au choc, ce qui tue le mécanisme.

LÉGENDE DES FIGURES

Figure 1_4 - Cette figure représente l'évolution de p en fonction du temps, compte tenu de la dépendance spatiale de x. Courbe en trait plein : accélération uniquement dans la phase de Sedov. Courbe en trait pointillé : accélération dès la première phase d'évolution de la S.N.

Figure 2_4 - Cette figure représente l'évolution de p en fonction du temps, compte tenu de la dépendance spatiale de x, et pour une S.N. évoluant selon la théorie de Mc Kee et Ostriker. Courbe en trait pointillé : accélération dès la première phase d'évolution de la S.N. Courbe en trait plein : accélération à partir de la phase de Sedov.

Figure 3_4 - Cette figure représente le spectre schématique des protons du rayonnement cosmique qui pourrait être obtenu si les Supernovae accéléraient les particules jusqu'à 10^5 GeV en une loi de puissance d'indice 2.3 et si les vents stellaires pouvaient accélérer les particules jusqu'à $5\ 10^6$ GeV avec un indice 2. Courbe pointillée : contribution des vents. Courbe pointillée pointée : contribution des Supernovae. Courbe pleine : somme des deux.

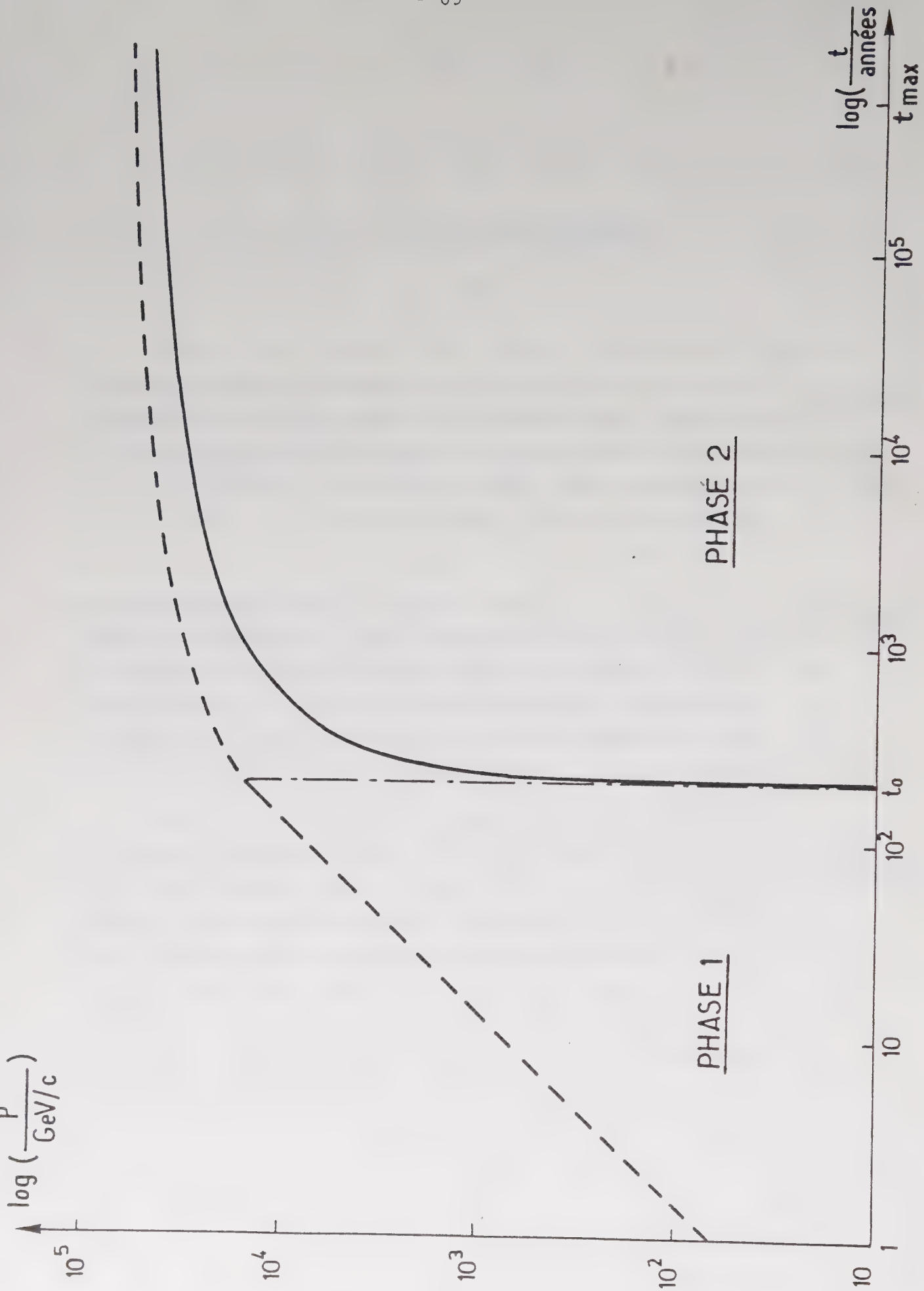

log (p / GeV/c)
10^5
10^4
10^3
10^2
10
1
PHASE 1
PHASE 2
10
10^2
t_o
10^3
10^4
10^5
t_max
log(t / années)

Figure 1$_4$

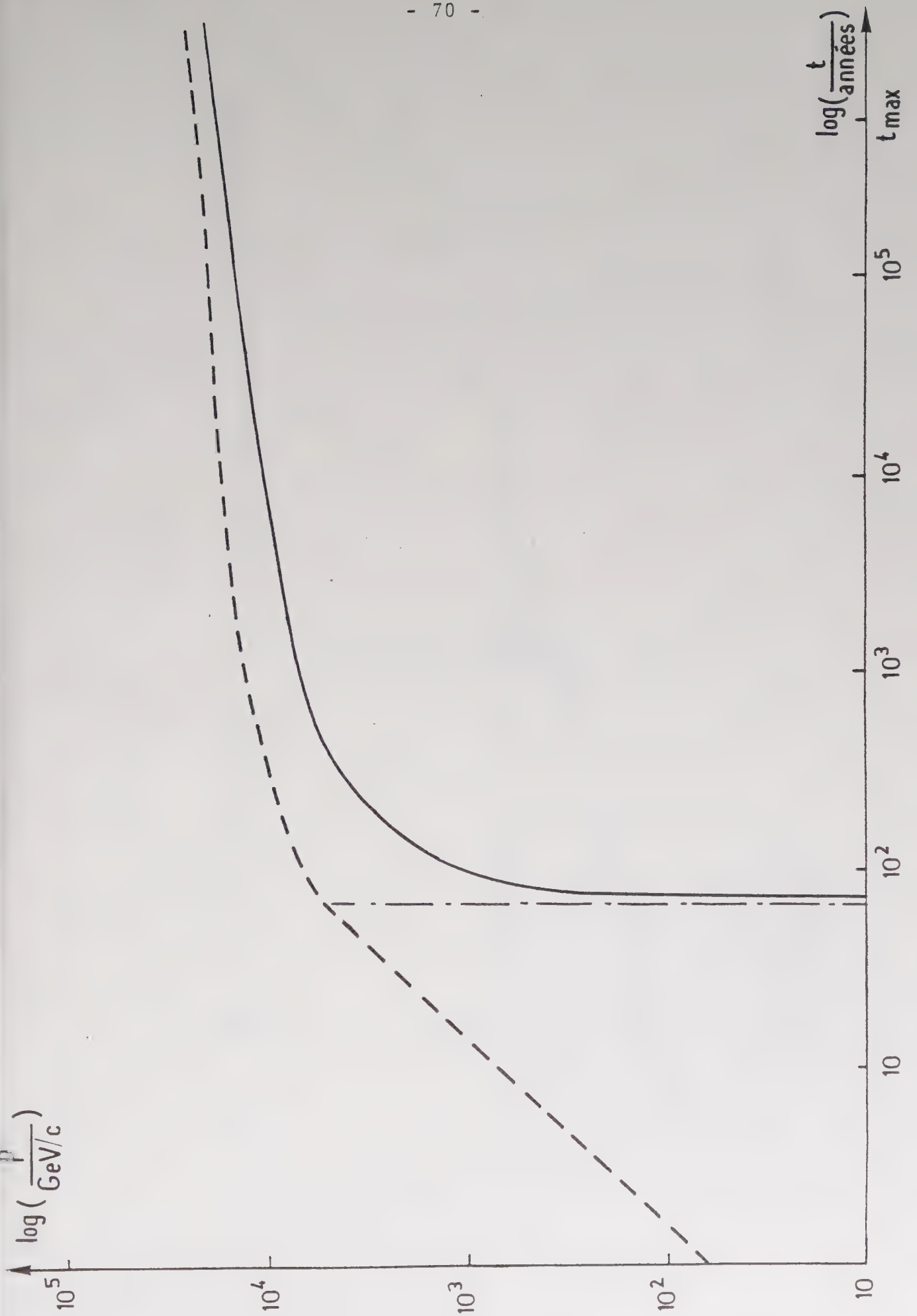


Figure 2$_4$

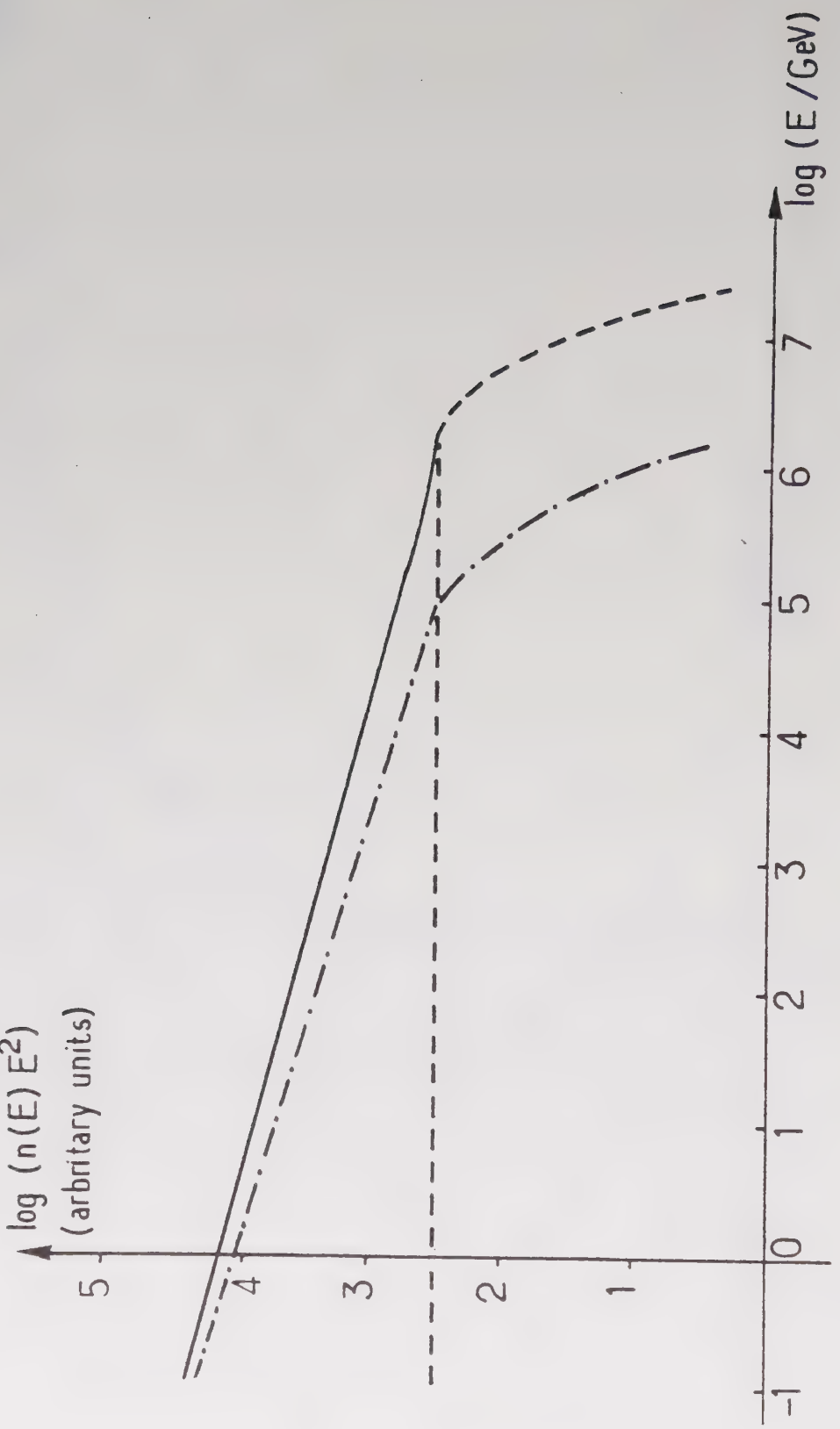


Figure 3$_4$

RESUME ET CONCLUSION

Dans le cadre du modèle exposé dans l'Introduction, l'énergie maximale la plus optimiste pouvant être atteinte par les R.C. durant le temps de vie de la S.N. est d'environ 10^5 GeV, ce qui est la limite inférieure acceptable d'après les observations.

Le modèle s'est bien battu contre une étude plus réaliste ; la turbulence engendrée par les R.C. au choc est grande, voisine de la turbulence maximale, les interactions onde-onde empêchant de la dépasser ; l'amortissement des ondes est négligeable dans le milieu coronal. L'effet de la dépendance spatiale du coefficient de diffusion n'amène qu'une diminution d'un facteur 2.5 de l'énergie maximale. Un autre facteur 2 provient du modèle d'évolution des S.N. avec évaporation des nuages. L'énergie maximale est donc plutôt de $2\ 10^4$ GeV.

Nous concluons à l'existence d'un problème des hautes énergies. Les différentes solutions envisagées ne sont pas satisfaisantes.

BIBLIOGRAPHIE

- Achterberg, A. et Norman, C.A., 1980, Astron. Astrophys. 89, 353.

- Armstrong, J.W., Cordes, J.M., Rickett, B.J., 1981, Nature 291, 561.

- Axford, W.I., Leer, E. et Skadron, G., 1977, Proc. 15th. I.C.R.C. (Conférence Internationale sur les R.C.) (Plovdiv) 11, 132.

- Axford, W.I., 1980, Proc. IAU/UPAP Symp. n° 94 on Origin of Cosmic Rays. Bologne, 339.

- Axford, W.I., 1981, Proc. 17th I.C.R.C. (Paris) 12, 155.

- Bell, A.R. , 1978a, M.N.R.A.S., 182, 147.

- Bell, A.R. , 1978b, M.N.R.A.S., 182, 443.

- Blandford, R.D. et Ostriker, J.P., 1978, Ap. J. (Lett.) 221, L29.

- Blandford, R.P. et Ostriker, J.P., 1980, Ap. J. 237, 793.

- Cesarsky, C.J., 1971, Ph .D. thesis, Harward Univ. Cambridge, 124 p.

- Cesarsky, C.J., 1980, Ann. Rev. Astron. Astrophys. 18, 289.

- Chandrasekhar, S., 1943, Rev. Mod. Phys. 15, 1.

- Chevalier, R.A. et Oegerle, W.R., 1974, Ap. J. 192, 457.

- Cox, D.P., 1979, Ap. J. 234, 863.

- Cox, D.R., Miller, H.D., 1965,"The Theory of Stochastic Processes".Methuen, Londres.

- Drury, L.O'C., 1982, en préparation.

- Ellison, D.C., 1981, Communication privée.

- Hemici, P., 1974, Applied and Computational Complex Analysis, Wiley - Interscience Publication.

- Hillas, A.M., 1981, I.C.R.C., 13, 69.

- Koch-Miramond L., 1981, Proc. 17th I.C.R.C. (Paris) 12, 21.

- Krymsky, G.F., 1977, Dok. Akad. Nauk, S.S.S.R. 234, 1306.

- Krymsky, G.F., Elshin, V.K., Romashenko, Yu. A., Bezrodnykh, I.R., 1978, Izv. Ak. Nauk, S.S.S.R. Ser. Fiz. V. 42, n° 5, 1070.

- Krymsky, G.F., Kuzmin, A.I., Petukhov, S.I., Turpanov, A.A., 1979, Proc. 16th I.C.R.C. (Kyoto), 2, 39.

- Krymsky, G.F., Kuzmin, A.I., Petukhov, S.I., 1979, Proc. 16th I.C.R.C. (Kyoto) 2, 44.

- Kulsrud, R.M., Cesarsky, C.J., 1971, Astrophys. Lett. 8, 129.

- Mc Kee, C.F. et Ostriker, J.P., 1977, Ap. J. 218, 148.

- Meyer J.P., 1981, Proc. 17th I.C.R.C. (Paris) 2, 265.

- Montmerle, T., Cesarsky, C.J., 1981a, Proc. 17th I.C.R.C. (Paris) 1, 173.

- Montmerle, T., Cesarsky, C.J., 1981b, Proc. 17th I.C.R.C. (Paris) 9, 234.

- Perron C., Engelman, J.J., Goret, P., Juliusson E., Koch-Miramond L., Meyer, J.P., Soutoul, A., Lund N., Rasmussen, I.L., Westergaard N., 1981, Proc. 17th I.C.R.C. (Paris) 9, 118.

- Prishchep, B.P., Ptuskin, B.C., 1981, Astronomica Revue 58 (en russe).

- Sedov, L.I., 1969,"Similarity and Dimensional Methods in Mechanics".New York, Academic.

- Spitzer, L., 1956, Ap. J., 124, 20.

- Toptygin, N., 1979, Izv. Ak. Nauk. S.S.S.R. Ser. Fiz. V. 43, n° 4, 755.

- Völk, H.J. et Cesarsky, C.J., 1982, preprint.

- Völk, H.J. et Mc Kenzie, 1981, Proc. 17th I.C.R.C. (Paris) 9, 246.

- Völk, H.J., Morfill, G.E., Forman, M.A., 1981, Ap. J. 249, 161.

- Watson, G.N., "A treatise on the theory of Bessel functions", 1966, Cambridge at the University Press.

- Wentzel, D.G., 1974, Ann. Rev. Astron. Ap., 12, 71.

- Woltjer, L., 1972, Ann. Rev. Astron. Ap., 10, 129.

ANNEXE

ACCELERATION DES RAYONS COSMIQUES GALACTIQUES

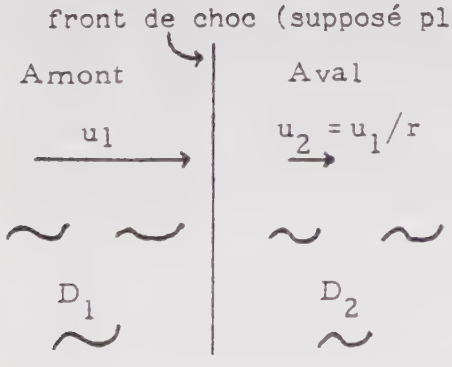
DANS LES ONDES DE CHOC

P.O. Lagage
Section d'Astrophysique, Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
France

Nous avons pensé que ce colloque intitulé "Mécanismes de production d'énergie dans le milieu interstellaire", était une excellente occasion pour une communication sur une composante du milieu interstellaire qui réclame beaucoup d'énergie : les rayons cosmiques. D'autant plus que le vieux problème de leur origine vient de connaître un regain d'intérêt grâce d'une part à la découverte d'un nouveau modèle qui permet de transférer beaucoup d'énergie à un petit nombre de particules et d'autre part à la découverte du milieu coronal dans lequel s'effectue ce transfert.

Après avoir décrit le modèle, nous présenterons le travail que nous avons entrepris sur celui-ci. Mais pourquoi vouloir accélérer des rayons cosmiques ? Les études des abondances isotopiques dans les météorites montrent que la densité des rayons cosmiques est restée constante dans le temps. Par ailleurs les mesures sur leur composition indiquent que certains d'entre eux s'échappent de la galaxie. Par conséquent il faut les régénérer ; le flux d'énergie nécessaire étant de l'ordre de 5.10^{40} erg/s. Où trouver cette énergie ? Très tôt les supernovae furent reconnues comme de bons candidats car lors de leur explosion elles fournissent au milieu interstellaire une quantité d'énergie environ dix fois supérieure au besoin des rayons cosmiques. Encore faut-il la transférer à une petite quantité de particules ! C'est l'objet du mécanisme récemment proposé par plusieurs auteurs (Krimsky, 1977 ; Axford, Leer, Skadron, 1977 ; Bell, 1978 ; Blandford, Ostriker, 1978) et que nous décrivons schématiquement ci-dessous.

Ce mécanisme a besoin de deux ingrédients : une onde de choc et un milieu diffusif de chaque côté (voir figure 1 ci-dessous).



$D_i = 1/3\ \lambda_i\ v$ $(i = 1,2)$ est le coefficient de diffusion.

$u_i (i = 1,2)$ est la vitesse du milieu dispersif dans le repère de l'onde de choc.

r est le rapport de compression.

Figure 1

Colloque : "Mécanismes de production d'énergie dans le milieu interstellaire", La Baume Sainte Marie, Juin 1981 .

Injectons dans l'onde de choc un petit nombre de particules-test, d'énergie suffisante pour voir le choc comme une discontinuité. En amont les particules vont être diffusées et convectées vers le choc. Ainsi toutes les particules retraverseront le choc. Par contre, en aval la convection aura tendance à les éloigner du choc. Aussi certaines particules vont-elles pouvoir s'échapper ; la probabilité d'échappement étant de $4\ u_2/c$. A chaque aller-retour à travers l'onde de choc une particule gagnera l'énergie $\Delta E = 4/3\ (u_1-u_2)/c\ E$. On peut alors en déduire le spectre des rayons cosmiques : une loi de puissance de pente $\mu = (2+r)/(r-1)$, qui a la propriété remarquable d'être indépendante des coefficients de diffusion. Pour un choc adiabatique fort $\mu = 2$, en bon accord avec le spectre observationnel corrigé des effets de propagation.

L'équation de base est :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_i \frac{\partial f}{\partial x}\right) - u_1 \frac{\partial f}{\partial x} + 1/3\ (u_1 - u_2)\ \delta(x)\ 1/p \frac{\partial f}{\partial p} \qquad (1)$$

où f (fonction du temps t, de l'espace x et de la quantité de mouvement p) est la distribution des particules dans l'espace des phases ; δ est la fonction de Dirac. Le premier terme du second membre représente la diffusion, le 2ème la convection et le 3ème l'accélération.

Ce modèle très général a été utilisé à des fins diverses. Originellement conçu pour expliquer le rayonnement cosmique galactique, il peut par exemple servir à produire des rayons cosmiques qui créent des rayons gamma (se référer à l'article de T. Montmerle). Dans cette communication nous nous intéressons aux rayons cosmiques galactiques ; nous cherchons à savoir si le modèle peut rendre compte de l'existence des rayons cosmiques sur une large gamme d'énergie (voir le spectre observationnel figure 2). L'existence d'une coupure en énergie, prédite par le modèle, a été reconnue assez tôt mais dans la littérature elle varie de 30 GeV à 10^6 GeV selon les auteurs. Nous avons fait une étude détaillée des deux causes principales de coupure en énergie : la sphéricité du choc et le temps de vie fini de l'onde de choc (Cesarsky, Lagage, 1981). L'équation (1) écrite à trois dimensions montre que pour que le procédé soit efficace (terme de pertes adiabatiques négligeables) l'inégalité $D(E)/U(t) < R$ (rayon du choc) doit être satisfaite. En général D croît avec l'énergie. C'est ce qui explique la coupure dûe à la sphéricité. Pour trouver la coupure dûe au temps de vie fini de l'onde de choc nous avons calculé la variation de l'énergie en fonction du temps en faisant l'approximation $dE/dt \approx \Delta E/\Delta T$, où ΔT est le temps moyen d'un aller retour à travers l'onde de choc et vaut $(\lambda_1/u_1) + (\lambda_2/u_2)$, puis en intégrant compte tenu de la variation de λ avec l'énergie et de u en fonction du temps.

Il nous faut maintenant préciser que la diffusion dans le milieu interstellaire est une diffusion magnétique. Les particules se heurtent aux petites perturbations (ou turbulence) du champ magnétique. Cette interaction peut effectivement être décrite par un coefficient de diffusion $D \sim 1/3\ c\ r_\ell\ (\Delta B^2/B^2)$ (r_ℓ est le rayon de Larmor, ΔB la variation du champ magnétique, seulement dans le cas de petites perturbations. Par conséquent le D minimum compatible

avec la théorie est égal à 1/3 $r_g c$. Nous nous plaçons systématiquement dans le cas le plus favorable, menant à une coupure à l'énergie la plus grande possible. Ainsi pour les supernovae, en aval de l'onde de choc la turbulence est créée par le choc. Comme nous ne connaissons pas l'échelle des longueurs de cette turbulence nous avons pris l'hypothèse la plus optimiste D = D min. En amont du choc ce sont les rayons cosmiques eux-mêmes qui créent la turbulence (Bell, 1978). Le taux de croissance étant grand, même en n'injectant que les rayons cosmiques préexistants, le niveau de turbulence atteint pourrait être haut. Cependant en tenant compte du transfert d'énergie entre les différentes échelles de turbulence, nous obtenons des valeurs raisonnables, proches de la turbulence maximale. Aussi là-encore nous prendrons D égal D minimum.

Nous pouvons maintenant donner les résultats pour les deux types de choc candidats à l'accélération des rayons cosmiques galactiques : les chocs de supernovae et les chocs de vents stellaires. Pour les supernovae la sphéricité donne $E_{max} \simeq 3.10^5$ GeV et le temps de vie $E_{max} \simeq 10^5$ GeV. Pour ce dernier résultat nous avons pris l'évolution de la supernova donnée par le modèle de Sedov dans un milieu de densité 10^{-3} particules/cm^3. Si nous avions pris un milieu de densité 1 particule/cm^3 nous n'aurions pu atteindre que 10^4 GeV. D'autres modèles plus réalistes comme le modèle de Mc Kee et Ostriker (se référer à l'article de J.P. Chièze) donneraient une coupure à plus basse énergie. Pour pouvoir traiter le problème analytiquement nous avons négligé un effet important, le temps d'établissement des ondes qui à 10^5 GeV est de l'ordre du temps de vie de la supernova. Nous l'incluons dans les calculs plus précis que nous sommes en train d'effectuer. Pour les vents la situation est différente car régions choquées et non choquées sont inversées (se référer à l'article de B. Lazareff). Une turbulence forte peut être présente des deux côtés du choc indépendamment des rayons cosmiques. Ainsi en prenant D min. des deux côtés la sphéricité nous donne $E_{max} \simeq 2.10^6 B_{-5}$ GeV et le temps de vie fini de l'onde $5.10^6 B_{-5}$ GeV (B_{-5} est la valeur du champ magnétique en unités de 10 μG).

En conclusion les supernovae peuvent difficilement expliquer les rayons cosmiques de haute énergie. Par contre bien que les vents ne puissent énergétiquement fournir q'une petite partie de l'ensemble des rayons cosmiques galactiques (Montmerle, Cesarsky 1981) leur contribution entre 10^5 et 2.10^6 GeV pourrait être importante. A très haute énergie, les rayons cosmiques sont certainement d'origine extragalactique, leur rayon de Larmor étant supérieur à l'échelle de hauteur du disque galactique.

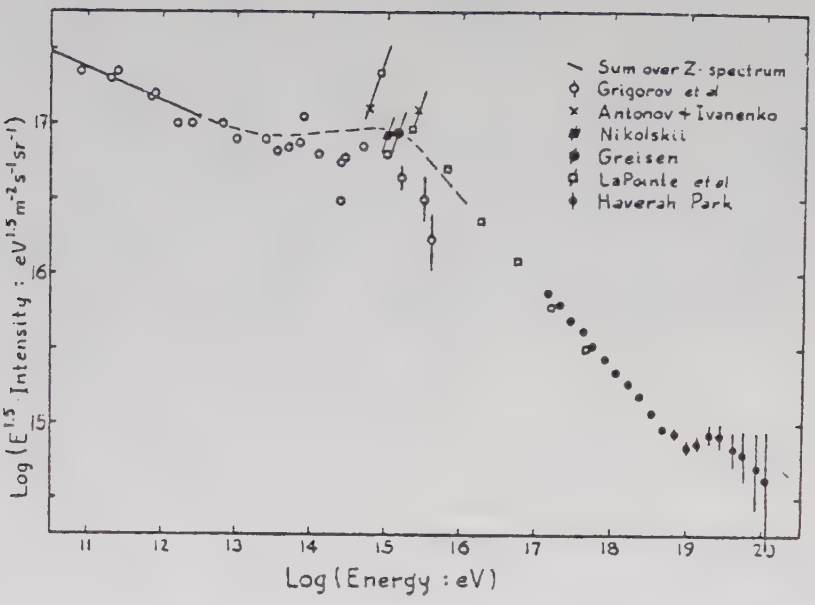


Figure 2
Spectre intégral d'énergie des rayons cosmiques
(J. Linsley 1980)

Ce travail a été fait en collaboration avec C. Cesarsky.

Références

G.F. Krimsky, 1977, Dokl. Akad. Nauk SSSR 234, 1306-1308.
W.I. Axford, E. Leer, G. Skadron, 1977, 15th Int. Cosmic Ray Conf. (Plovdiv, Bulgaria) 11, 132.
A.R. Bell, 1978, M.N.R.A.S. 182, 147.
R.D. Blandford, J.P. Ostriker, 1978, Ap.J. (Letters) 221, L29.
C.J. Cesarsky, P.O. Lagage, 1981, 17th Int. Cosmic Ray Conf. (Paris), 2, 335.
T. Montmerle, C.J. Cesarsky, 1981, 17th Int. Cosmic Ray Conf. (Paris), 11, 132.

HIGH ENERGY COSMIC RAY ACCELERATION BY DIFFUSIVE SHOCKS

P.O. Lagage and C.J. Cesarsky

Section d'Astrophysique, Centre d'Etudes Nucleaires de Saclay, France

Key words : cosmic rays, shock acceleration, supernovae, stellar wind.

The mechanism of acceleration of cosmic rays by shock waves which has been discovered independently by Krymsky (1977), Axford et al. (1977), Bell (1978) and Blandford and Ostriker (1978) (ref. 1 to 4), presents many attractive features, but it also encounters some difficulties. One of the problems is that it cannot accelerate particles to very high energies. This is because the mean time between shock crossings is long for high energy particles, so that the acceleration process is slow. We present here a derivation of the mean crossing time which has the advantage, over previous methods, of being readily generalized when the diffusion coefficient is space dependent. Then, we evaluate an upper limit to the energy that can be attained for a supernova shock and for a stellar wind terminal shock.

The problem of the interaction of cosmic rays of a given energy and a shock in a diffusive medium is analogous to the problem of the random walk of particles in the presence of an absorbing wall moving with a uniform velocity (-u). A particle is "absorbed" when it reaches the shock because its energy is changed. For simplicity, consider diffusion in one dimension, with a diffusion coefficient $K = \lambda v/2$ (λ is the particle mean free path, and v the particle velocity). At time t = 0, a test particle is put at a distance λ_o of the wall, where λ_o is the value of λ close to the wall. The probability W(x,t)dx that the particle be between (x) and (x+dx) at time t satisfies the equation :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial W}{\partial x}\right) - u \frac{\partial W}{\partial x} \qquad (1)$$

The boundary conditions are $W(x, t = 0) = \delta(x-\lambda_o)$, and $W(x = 0, t) = 0$. The remaining constant of integration is set equal to zero to avoid a divergence of W. The probability of reaching the wall between (t) and (t+dt) is, then : $G(t)dt = K\,(\partial W/\partial x)_{x=0}\,dt$. Equation (1) is solved by taking Laplace transforms with respect to time. If K = constant, we obtain :

$$G(t) = \exp\left(-\frac{u\lambda_o}{2K}\right)\frac{\lambda_o}{\sqrt{K}}\,\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{t^{3/2}}\,\exp\left(-\frac{\lambda_o^2}{4Kt} - \frac{u^2}{4K}t\right)$$

The probability P that the particle eventually hits the wall is :

$$P = \int_o^\infty G(t)dt = \exp\left[-\lambda_o(u+|u|)/(2K)\right]$$

If $u < 0$, $P = 1$; if $u > 0$, $P \sim 1-2\,u/v$ (to first order in u/v), in agreement with Bell's (1978) result.
The mean time to reach the wall is

$$T \sim \frac{1}{P}\int_o^\infty t\,G(t)dt = \frac{\lambda_o}{|u|} \qquad (2)$$

(see also Krymsky (1978 ; ref. 5) for an alternative derivation of this result). An application of this method to cases where λ is a function of x, as in Bell (1978 ; ref. 3), will be given elsewhere.

We can apply our formula (2) to find an upper limit on the energy that can be attained by cosmic rays interacting with shock waves in the interstellar medium. We approximate $dE/dt \sim \Delta E/\Delta t$, where ΔE is the mean energy gained in one crossing, and Δt the mean crossing time. The upstream and downstream velocities of the fluid with respect to the shock front are respectively u_1 and u_2, and the cosmic ray mean free path on each side is $\lambda_1(E)$ and $\lambda_2(E)$. Then, $\Delta E = 4(u_1 - u_2)E/3$, and $\Delta t \sim (\lambda_1/u_1) + (\lambda_2/u_2)$.

Proceedings of an International School and Workshop on Plasma Astrophysics held at Varenna, Como, Italy, from 27 August to 7 September 1981. (ESA SP-161)

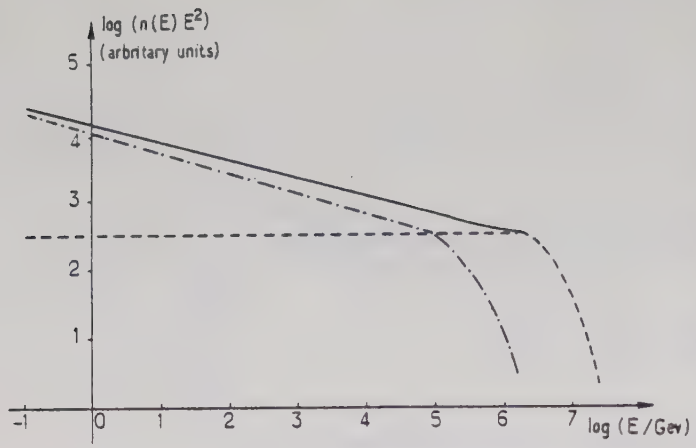


Fig. 1 Schematic diagram of the differential spectrum of cosmic rays which could be obtained if supernova and stellar winds can accelerate particles up to the high energy limit found in the text. Dotted line : stellar wind contribution. Dotted-dashed line : supernova contribution. Full line : sum of the two.

Let us first consider supernova shocks. We can assume that the turbulence is plentiful downstream. Upstream, the cosmic ray precursor generates waves (ref.3) ; even if only the pre-existing cosmic rays are injected in the process, the wave field may build up to a high level. To obtain an upper limit on the maximum energy of protons, we make the most optimistic estimate consistent with the model : we assume that $\lambda_1 = \lambda_2 = r_e$, where r_e is the cosmic ray Larmor radius. (In fact, two effects may limit the amplitude of the wave field : the non-linear transfer of energy between the different scales, and the fact that the waves resonating with high energy cosmic rays only grow in a time comparable to the supernova remnant lifetime).

For the shock wave velocity, we have taken the Sedov solution for a supernova expansion, in a homogeneous medium of density 10^{-3}cm^{-3}. A more realistic model (e.g. McKee and Ostriker 1977 ; ref.6) would have yielded a lower value for the maximum energy. The upper limit which we have thus obtained for protons is $E_{max} \sim 10^5$ GeV. The maximum total energy of particles with $Z > 1$ is Z times higher than the proton limit.

For the case of a stellar wind terminal shock, the configuration is inverted : the shocked gas is in the region outside the circular shock. The shock is bounded, on the inside, by the agitated stellar wind gas ; on the outside, by the gas having passed through the shock. The turbulence level may be quite high on both sides ; so, again, we assume $\lambda = r_e$. Assuming a terminal velocity of 3.10^8 cm/s and a lifetime of 10^5 years,we obtain : $E_{max} \sim 5.10^6 (B/10^{-5}\ G)$ GeV, where B is the magnetic field strength at the shock. (B could be $\sim 10^{-5}$ G if the magnetic field at the surface of the star has a strength ~ 100 G, and if the radius of the shock is $\sim 10^6$ times that of the star).

But in the stellar wind case, the acceleration of particles to high energies is further hindered by the fact that adiabatic losses quench the mechanism if the radius of the shock R is $< K/u$. Taking this effect into account, we get $E_{max} \sim 2.10^6 B_{-5}$ GeV for protons.

We know, from energy budget arguments, that stellar winds alone cannot maintain the galactic cosmic ray pool (Montmerle and Cesarsky 1981 ; ref.7). Still, it seems interesting to speculate that the winds could contribute in a sizeable way to the very high energy cosmic ray pool. This might explain the apparent bump in the spectrum at $\sim 10^6$ GeV (Linsley 1980 ; ref.8), and may be related to the strange behaviour of the cosmic ray composition in that energy range (as discussed in several contributions at the 17th Int. Cosmic Ray Conference in Paris, July 1981).

REFERENCES

1. Krymsky G F 1977, Dokl. Akad. Nauk SSSR 243, 1306.
2. Axford W I, Lee F, Skadron G 1977, 15th Int. Cosmic Ray Conf. (Plovdiv, Bulgarie, 11, 132).
3. Bell A R 1978, M.N.R.A.S. 182, 147.
4. Blandford R D, Ostriker J P 1978, Ap.J.(Letters) 221, L 29.
5. Krymsky G F 1979, 16th Int. Cosmic Ray Conf. (Kyoto, Japan, 2, 39).
6. McKee L F, Ostriker J P 1977, Ap.J. 218, 148.
7. Montmerle T, Cesarsky C J 1981, 17th Int. Cosmic Ray Conf. (Paris) 11, 132.
8. Linsley 1980, Proc. IAU/UAPP Symp. n°94 On Origin of Cosmic Rays, Bologne.

GALACTIC COSMIC RAYS AND SHOCK WAVE ACCELERATION : NOT SO EASY

C.J. Cesarsky, P.O. Lagage
Section d'Astrophysique, Centre d'Etudes Nucleaires de Saclay, France

1. Introduction

Several authors (Krimsky 1977, Axford et al. 1977, Bell 1978, Blandford and Ostriker 1978, 1980) have studied cosmic ray acceleration by shock waves. In particular, it has been proposed that galactic cosmic rays be accelerated by supernova shocks sweeping through the interstellar medium. This theory is successful on many accounts, but it encounters some problems :

a) It tends to predict too flat a variation of the ratio of secondary over primary species with energy (see Eichler 1980, Fransson and Epstein 1980) ; to reconcile it with the observations, it is necessary to assume that the average cosmic ray does not suffer many re-acceleration during its galactic lifetime.

b) It treats cosmic rays as test particles, neglecting their effect on the shock structure. In fact, the cosmic ray pressure is probably the dominant one in the shock vicinity. Several groups are now working actively on this more difficult problem of cosmic ray acceleration by non-linear shocks.

c) It cannot accelerate particles to very high energies : $E < E_{max}$. This has been noted by several authors, but very different values of E_{max} appear in the literature. We consider here this problem in more details than previous authors ; we take systematically the most optimistic conditions, to obtain a firm upper limit to E_{max}.

Stellar wind terminal shocks may also accelerate particles by the same mechanism ; in this case, the shock may remain non-linear (Montmerle and Cesarsky 1981b). The energetics, however, are not favourable (Montmerle and Cesarsky 1981a). Still, we evaluate E_{max} for this case too ; we conclude that these shocks may provide some of the galactic high energy particles.

2. Highest energy of cosmic rays accelerated by supernova shocks

Let u_1 and u_2 be the upstream and downstream velocities of the fluid with respect to a supernova shock, and $\lambda_1(R)$ and $\lambda_2(R)$ (R = rigidity) the diffusion mean free path of cosmic rays on either side of the shock. We assume that the magnetic field direction is perpendicular to the shock front. In a steady state, the shock is preceded by a cosmic ray precursor which extends over a length $\ell = \lambda_1 v/3u_1$, where

ème Conférence Internationale sur le rayonnement cosmique, Paris, Juillet 1981.

v is the cosmic ray velocity. The acceleration process is operative only if the diffusion length ℓ is short compared to the radius R of the shock ; otherwise, adiabatic losses dominate over the energy gains. If $\ell_{1,2} \ll R$, the energy of cosmic rays is increased by $\Delta E \sim 4(u_1-u_2)E/(3c)$ at each crossing ; while the mean crossing time is $\Delta t \sim \lambda_1/u_1 + \lambda_2/u_2$ (Krimsky 1979). In the following, we make the approximate $(dE/dt) \sim (\Delta E/\Delta t)$.

According to the quasilinear approximation, the mean free path of cosmic rays of Larmor radius r_ℓ is related to the energy density J of Alfven waves of wavenumber $k = 1/r_\ell$ per unit logarithmic bandwith normalized to the ambient magnetic energy density. Upstream, the waves can be generated by the cosmic ray precursor ; then J obeys (Bell 1978) :

$$\partial J/\partial t = u_1 \, \partial J/\partial x + \sigma J - \Gamma J \qquad (1)$$

where σ and Γ are respectively the growth rate and the damping rate of the waves. Γ also includes non-linear processes transferring energy between waves in the k range and other regions of the wave spectrum. If the external medium is neutral or partially ionized hydrogen, the damping rate is fast ($\Gamma \sim 10^{-9} n_H \text{ sec}^{-1}$, where n_H is the density of neutral hydrogen, Kulsrud and Cesarsky 1971) and impedes the growth of waves resonant with cosmic rays of even moderate energy. But if the shock wave propagates in the coronal phase of the interstellar medium, with $n_H = 0$, $n_e = 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$, $T = 10^6 °k$, the damping rate is much lower. In the cases of interest, J is high enough that the relevant Γ, due to interaction between heat waves and particles (non-linear Landau damping) saturates : $\Gamma_{n\ell}(k) = ck(v_i/c)\sqrt{J}$, where v_i is the ion thermal velocity (Cesarsky and Kulsrud 1980) ; then the damping term in eq.(1) is negligible compared to the convection term. Neglecting the damping, assuming $J(k, -\infty) = 0$, and $\partial J/\partial t = 0$, it is easy to calculate J (Bell 1978) :

$$J = (4/3\pi)(v/u_1)\, r_\ell/(x_o - x_1) \qquad (2)$$

where the length scale $x_o \sim r_\ell \, c/v_A$ (magnetic field energy density/cosmic ray energy density at pc) $= 1.15 \, 10^3 \sqrt{n_{e-3}} \, p^3 \, [\, f(0,p) - f_o(p) \,]$ where n_{e-3} is the electron density in units of 10^{-3} cm^{-3} ; f(0,p) and $f_o(p)$ the distribution function at the shock and at $-\infty$.

In a steady state, a lower limit to f(0,p) is obtained by assuming that only the pre-existing cosmic rays are injected in the process ; if their distribution function at $-\infty$ is $f(p) = f_{gal} \, p^{-4.5} \, H(p-p_o)$ (where H is the Heaviside function), then at the shock : $f(0,p) = 8 f_{gal} \, P_o^{-0.5} \, p^{-4}$. With $f_{gal} = 2.7 \, 10^{-3}$ c.g.s. units, $p_o = 100$ MeV/c, $B_{-6} = 1$, eq.(2) yields : $J > 1$. This result is inconsistent with the underlying theory, which is only valid for $J \ll 1$. Two effects will in fact tend to reduce J : a) the growth time, $(1/\sigma)$, of waves of wavenumber k is comparable to the acceleration time of cosmic rays of Larmor radius $r_\ell = 1/k$. Thus, at small k, J will not attain its

steady state solution during the supernova lifetime and a time dependent solution is indispensable. b) If J is large, the rate of non-linear transfer of energy between the different scales may be much faster than given by weak turbulence theory ; applying Kraichman's MHD turbulence theory, we find $J < 1$ over the whole spectrum.

The consequence of these two effects will be presented elsewhere. In the present paper, we will obtain a strict upper limit to the maximum energy by making the most optimistic assumption that is consistent with the theory : $\lambda_1 = r_\ell$. The shocked region is presumably highly turbulent, so we also take : $\lambda_2 = r_\ell$.

In the Sedov model of supernova expansion in uniform medium, the radius attained by a supernova remnant at the end of the adiabatic phase is : $R_c = 19 (E_{51}/n)^{1/3}$ pc, where E_{51} is the initial supernova energy in units of 10^{51} ergs. If clouds were completely evaporated inside supernova remnants, we should take for n the mean gas density. If clouds are only partially evaporated (McKee and Ostriker 1977), the final radius is larger ; if clouds are thermally insulated by the magnetic fields, they do not evaporate at all (Cox 1978). Again, we take the most optimistic case : a Sedov expansion in the hot interstellar medium ($n \sim 10^{-3}$ cm^{-3}), neglecting the clouds. Then, integrating (dE/dt) over the supernova lifetime, we obtain $E_{max} \sim Z\ 10^5 B_{-6}$ GeV, where Z is the charge of the particle. The cut-off in the spectrum depends on the charge of the particle, so that one can expect composition changes in this region. At $E < E_{max}$, the effect of the curvature of the shock can be neglected.

Thus, it appears that supernova shocks cannot even accelerate cosmic rays up to the knee of the spectrum, at $E \sim 10^6$ GeV. Supernova remnant shock waves would have to encompass much bigger volume to be able to accelerate particles to energies higher than E_{max} ; but then the probability of re-acceleration of the individual particles would become too high to account for the observed variation with energy of the secondary/primary ratio (see Cesarsky et al. 1981 and references therein).

3. Stellar winds terminal shocks

For the case of stellar wind terminal shock, the configuration is inverted : the shocked gas is in the region outside the circular shock. The shock is bounded, on the inside, by the agitated stellar wind gas ; on the outside, by the gas having passed through the shock. The turbulence level may be quite high on both sides, independantly of cosmic rays ; so, again we assume $\lambda = r_\ell$.

Assuming a terminal velocity, w_s , of $3\ 10^8$ cm/s and a lifetime of 10^5 years, the constraint due to the finite lifetime of the shock yields $E_{max} \sim 5\ 10^6\ Z$

$(B/10^{-5}$ G) GeV, where B is the magnetic field strength at the shock, assumed perpendicular to the shock (optimistic case). The curvature condition yields $E_{max} \sim 2\ 10^6\ Z(10^{-5}\ G/B)\ (5pc/R_c)\ (3\ 10^8 cm/s/w_s)GeV$.

We know, from energy budget arguments, that stellar winds alone cannot maintain the galactic cosmic ray pool (Montmerle and Cesarsky 1981a). Still, it seems interesting to speculate that the winds could contribute in a sizeable way to the very high energy cosmic ray pool. A possible configuration is shown on fig.1. We have taken the differential spectrum n(E) (n(E)dE is the number of cosmic rays with the energy between E and E+dE) proportional to E^{-2} for the wind case and to $E^{-2.3}$ for the supernova case. The efficiency of conversion of stellar wind energy into cosmic ray energy is 14%. (from the formula $\eta = 0.008 \log (E_{max}/E_o)$, Montmerle and Cesarsky 1981b) and the ratio of supernova power to wind power is 20. This implies that the efficiency of acceleration for supernova is 7%. Stellar winds may explain the knee in the spectrum at ~ 10^6 GeV (Linsley 1980), and may be related to the strange behaviour of the cosmic ray composition in that energy range (as discussed in several contributions at this conference).

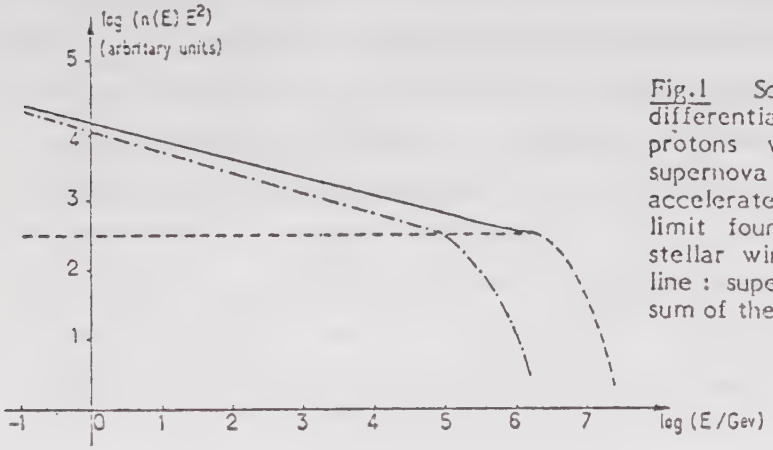


Fig.1 Schematic diagram of the differential spectrum of cosmic ray protons which could be obtained if supernova and stellar winds can accelerate particles up to the high energy limit found in the text. Dotted line : stellar wind contribution. Dotted-dashed line : supernova contribution. Full line : sum of the two.

REFERENCES

Axford, W.I., Lee, F., Skadron, G. 1977, 15th Int. Cosmic Ray Conf. (Plovdiv, Bulgarie, 11, 132).
Bell, A.R. 1978, M.N.R.A.S. 182, 147.
Blandford, R.D., Ostriker, J.P. 1978, Ap.J.(Letters) 221, L29.
Blandford, R.D., Ostriker, J.P. 1980, Ap.J. 237, 793.
Cesarsky, C.J., Kulsrud, R.M. 1980, Proc. IAU/UPAP Symp. n°94 on Origin of Cosmic Rays, Bologne, 251.
Cesarsky, C.J., Koch, L., Perron, C. 1981, these proceedings , 2, 22.
Cox, D.P. 1978, Ap.J. 234, 863.
Eichler, D. 1980, Ap.J. 237, 809.
Fransson, C., Epstein, P.I. 1980, Ap.J. 242, 411.
Krymsky, G.F. 1977, Dokl.Akad.Nauk SSR, 243, 1306.
Krymsky, G.F. 1979, 16th Int. Cosmic Ray Conf.Kyoto, Japan, 2, 39.
Linsley, J. 1980, Proc. IAU/UPAP Symp. n°94 on Origin of Cosmic Rays, Bologne, 43.
McKee, L.F., Ostriker, J.P. 1977, Ap.J. 218, 148.
Montmerle, T., Cesarsky, C.J. 1981a, these proceedings, 2, 307 and late paper.
Montmerle, T., Cesarsky, C.J.1981b, these proceedings, 1, 173.

Submitted to Astronomy and Astrophysics May 1982

COSMIC-RAY SHOCK ACCELERATION IN THE PRESENCE OF SELF-EXCITED WAVES

P.O. LAGAGE AND C.J. CESARSKY

SECTION D'ASTROPHYSIQUE
CENTRE D'ÉTUDES NUCLÉAIRES DE SACLAY, FRANCE

Running title : Shock acceleration

Send proofs to : P.O. LAGAGE
Section d'Astrophysique
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
Bat. 28
91191 Gif-sur-Yvette Cedex

Submitted to : Main Journal

ABSTRACT

We examine the effect of the spatial dependence of the diffusion coefficients on the acceleration rate of particles by diffusive plane shock waves. Upstream, hydromagnetic waves are generated by cosmic rays diffusing away from the shock. Cosmic rays are scattered by these waves, and by the underlying turbulence ; thus the diffusion coefficient increases away from the shock. Downstream, the diffusion coefficient may be taken as uniform. We tackle the problem with two methods : first, we derive an approximate solution to the transport equation, which allows us to evaluate the time of establishment of the equilibrium spectrum ; second, we use a random walk approach which emphasizes the stochastic nature of the acceleration mechanism. We show that the spatial dependence of the diffusion coefficient considered leads to an increment of the acceleration time. This effect tends to limit even more the energy that can be attained by particles accelerated throughout the life of a supernova remnant.

Key words : Cosmic-ray acceleration, shock waves, hydromagnetic waves.

I - INTRODUCTION

In recent years the old problem of cosmic-ray acceleration has become alive again, with the study of a new acceleration mechanism (Krymsky, 1977 ; Axford, Leer and Skadron, 1977 ; Bell, 1978 a, b ; Blandford and Ostriker, 1978). We summarize the main features of the mechanism ; for more details the reader is referred to the review by Axford (1981). This mechanism requires two ingredients which are not rare in Astrophysics : a shock wave and a diffusive medium. Let f be the particle distribution function in the phase space, $u_1(u_2)$ and $D_1(D_2)$ the velocity and the diffusion coefficient of the medium upstream (downstream) of the shock ; Δu is the difference between u_1 and u_2. When the shock can be considered plane (which for the case D constant, implies that the radius of curvature of the shock is large compared with D_1/u_1 and D_2/u_2), the transport equation reads :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_i \frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{1}{3} p \frac{\partial f}{\partial p} \Delta u \, \delta(x) + Q_o \, \delta(x) \qquad (1)$$

The variables x and p are the spatial coordinate and the momentum of the particle ; t is the time. i is 1(2) when $x < 0$ (> 0). $Q_o \, \delta(x)$ represents the injection, assumed here to occur at the shock ; δ is the Dirac function. The cosmic rays are treated as test-particles, in the sense that their influence on the shock is not taken into account. The steady state solution of equation (1) at $x = 0$ is :

$$f_o(p) = q \, p^{-q} \int_o^p p'^{\,q-1} \left[\frac{Q_o(p')}{u_1} + f(x = \infty, p') \right] dp' \qquad (2)$$

where $q = 3 u_1/\Delta u$. If a $\delta(p'-p_o)$ function is injected, then f_o is a power law of index $-q$; this result also holds, when

$p >$ several p_o, if a power law $p'^{-q'} H(p'-p_o)$ (where H is the Heaviside function) with $q' > q$ is injected, while if $q' < q$, the spectrum retains the flatter slope $-q'$. A very nice alternative derivation of this result, due to Bell (1978 a, b) emphasizes the sequential aspect of the mechanism. At every cycle (a crossing and crossing back) through the shock, the momentum p of a particle increases on the average by the amount $\Delta p = (4/3)\ (\Delta u/v)\ p$ (v is the particle speed). The diffusion makes the particles perform a great number of cycles, with a probability $\eta = 4\ u_2/v$ of escaping downstream at each cycle. This yields again a power law spectrum of index $-q$.

This power law spectrum makes the mecnanism very attractive. Indeed it has the remarquable property of being independent of the diffusion coefficients. For a strong shock with $u_2 = 1/4\ u_1$, the power law index is -4, very close to the value observed for the galactic cosmic rays, corrected for propagation effects. Supernova shocks are energetically the best candidates for galactic cosmic-ray acceleration. However, when applied to this case, the mechanism encounters some difficulties, owing to its slowness (Cesarsky and Lagage, 1981 ; Ginzburg and Ptuskin, 1981 ; Lagage and Cesarsky, 1982).

The problem of the time dependence of the solutions has been tackled in two ways. The first one is to solve the transport equation (1), either exactly, as has been done for D = constant by Krymsky et al. (1978) and Toptygin (1979), or only approximately for long times as has been done by Axford (1981) when D = D(p) (see also Drury, 1982). Then it appears that the time for the establishment of the steady state solution from the momentum p_o to the momentum p is given by the formula :

$$t_a = \int_{p_o}^{p} \frac{3}{\Delta u} \left(\frac{D_1}{u_1} + \frac{D_2}{u_2}\right) \frac{dp'}{p'} \qquad (3)$$

An alternative approach, due to Krymsky et al. (1979), emphasizes the diffusion aspect, responsible for the slowness of the phenomena. In this approach the mean time of a crossing through the shock is calculated by analogy with a one dimensional random walk problem in the presence of a moving absorbing wall. This model is also interesting in providing a derivation of the escape probability η. In the case D = constant the mean time of a cycle is :

$$T_{cycle} = \left(\frac{\lambda_1}{u_1} + \frac{\lambda_2}{u_2}\right) \qquad (4)$$

where λ_1 and λ_2 are the mean free paths associated with the diffusion coefficients. Approximating dp/dt by $\Delta p/T_{cycle}$ and integrating, one recovers formula (3) (with a slight difference of a factor 3/4 because in the second approach the diffusion is assumed to be one dimensional).

Let us notice that, although the steady state solution is independent of the diffusion coefficients, the time to reach equilibrium, t_a, is determined by them. If the waves generated by the cosmic rays play a role in this mechanism, then, upstream of the shock, the diffusion coefficient depends on the spatial variable x (Bell, 1978a). In this paper we have considered the effect of the x dependence in the study of the acceleration time, using both approaches. In section II, we discuss the x dependence of the diffusion coefficients. In section III, we exhibit a solution of equation (1), valid at moderately long times. Section IV deals with the random walk aspect. In Section V we briefly discuss the consequences of the new acceleration time on the maximum energy reached during the lifetime of a supernova shock, and on the importance of the energy losses suffered by particles during the acceleration process.

II - DIFFUSION COEFFICIENTS

Bell (1978a) was the first to discuss in details the diffusion coefficients. Upstream, for super-Alfvenic shocks. the cosmic rays stream, in the frame of the plasma, at a velocity greater than the Alfven velocity v_A. They can supply some of their energy to the hydromagnetic waves they are resonating with. If $\mathcal{F}(x,p,t)$ is the energy density per unit logarithmic bandwith relative to the ambient magnetic energy density (U_M) of waves resonating with particles of momentum p, we have :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \sigma \mathcal{F} + \Gamma \mathcal{F} = 0 \qquad (5)$$

where the growth rate σ is equal to :

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} v_A \frac{p^4 v}{u_M \mathcal{F}} \frac{\partial f}{\partial x} \qquad (6)$$

Γ is the damping rate ; B is assumed to be perpendicular to the shock. The waves scatter the particles ; in the framework of the quasi-linear theory, the diffusion coefficient is given by :

$$D = \frac{4}{3\pi} \frac{r_e v}{\mathcal{F}} \qquad (7)$$

where r_e is the Larmor radius of particles of momentum p. Bell has given the steady state solution of eq. (5) and (1), neglecting the damping and taking the boundary conditions $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_\infty = 0$, $f \to f_\infty$ when $x \to \infty$ and $Q_0 = 0$.

We consider here the solution with $\mathcal{F}_\infty \neq 0$; for example $\mathcal{F}_\infty$ can be the interstellar turbulence. Then the solution becomes :

$$f = f_\infty + \frac{\mathcal{F}_\infty}{\mathcal{F}_{Bell}(x=o)} \frac{(f_o - f_\infty)}{(1 + \frac{\mathcal{F}_\infty}{\mathcal{F}_{Bell}(x=o)}) \exp(-\mathcal{F}_\infty \frac{x}{a}) - 1} \quad (8)$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty + \frac{\mathcal{F}_\infty}{(1 + \frac{\mathcal{F}_\infty}{\mathcal{F}_{Bell}(x=o)}) \exp(-\mathcal{F}_\infty \frac{x}{a}) - 1} \quad (9)$$

where :

$$a = \frac{4}{3\pi} \frac{v}{u_1} r_e \quad (10)$$

$$\mathcal{F}_{Bell}(x) = \frac{a}{(x_o - x)} \quad (11)$$

$$x_o = \frac{1}{\pi^2} \frac{u_M}{v_A p^4 (f_o - f_\infty)} r_e \quad (12)$$

When $|x|$ is large there are few cosmic rays and $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}_\infty$. When $|x|$ is small, if $\mathcal{F}_\infty << a / x_o$, the cosmic-ray turbulence dominates. To make the analytical calculations more tractable, we have approximated the x dependence of the upstream coefficient by $D = D_{Bell} = u_1 (x_o - x)$ from $x = o$, where D is equal to D_o, up to $|x| = b$ where $D_{Bell} = D_\infty$, then $D = D_\infty$; $b = x_o + a / \mathcal{F}_\infty$. Subsequently we inject this steady state solution in the time dependent problem to estimate the acceleration time ; in a separate paper (Lagage et Cesarsky, 1982) we have considered the delay of the acceleration due to the wave growth, in a slightly different context, and find that it is negligible.

As noted by Bell, the shock generates turbulent motions, so that the region just behind the shock is highly turbulent ; indeed, this turbulence is observed in situ in the earth bow shock. Presumably the turbulence slowly dies out after the passage of the shock, so that downstream we also expect that the diffusion coefficient increases away from the shock. To attempt to evaluate this effect, we adopt the theory of MHD turbulence proposed by Kraichnan (1965), in which the turbulent energy present at scales $\sim (2\pi/k)$ is transferred to shorter scales in a time : $2 r_e / [v_A \mathcal{F}(p = eB/(ck))]$. Then, after the passage of the shock, at $t = 0$, the turbulent energy decays following :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \frac{v_A}{2\, r_e}\, p^2\, \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\mathcal{F}^2}{p}\right) \qquad (13)$$

We assume that the shock generates turbulence at all scales, that is :

$$\mathcal{F}_{(t = o,\ p)} = \mathcal{F}_o \qquad (14)$$

Equation (13), with the boundary condition (14) can be integrated by the method of characteristics and yields :

$$\mathcal{F}_{(p,x)} = \frac{2\, \mathcal{F}_o}{1 + \sqrt{1 + 2\, \mathcal{F}_o\, \frac{v_A}{u_2}\, \frac{x}{r_e}}} \qquad (15)$$

where we have used the fact that in medium 2, the shock speed is u_2. The scale length x_D, such that $\mathcal{F}(p,\ x_D) = \frac{1}{2}\, \mathcal{F}(p,\ x=o)$ is :

$$x_D = 3\, \pi\, \frac{u_1\, u_2}{v_A\, v}\, \frac{\mathcal{F}_{Bell}(x=o)}{\mathcal{F}_o}\, x_o \qquad (16)$$

In the case of supernova shocks propagating in the interstellar medium, x_D and x_o are of the same order. Then, given the weaker x dependence of $\mathcal{F}$, the spatial dependence of the diffusion coefficient downstream can be neglected. Consequently, we simply take D_2 = constant.

To study more generally the influence of the space dependence of D_1, we have introduced a parameter α, such that D_1 can be written $D_1 = u_1\, (x_o - \alpha\, x)$ for $|x| < b$ and $D_1 = D_\infty$ for $|x| > b$. The calculations are not seriously encumbered with respect to the case $\alpha = 1$. The behavior of the diffusion coefficient considered is shown in figure 1.

III - ASYMPTOTIC SOLUTION

The equation (1) lends itself very well to a study by Laplace transforms, the associated variable being ω. Let $\bar{f}$ be the Laplace transform of f. The transport equation becomes :

$$\omega \bar{f} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right) - u_i \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} - \frac{1}{3} p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} \Delta u \, \delta(x) + \frac{Q_o}{\omega} \delta(x) \qquad (17)$$

u_1 and u_2 are assumed to be independent of x and t. We further assume that particles are injected at the shock, at a fixed energy and at a constant rate. This allows us to assess the effect of the x dependence of D, and to follow easily the time evolution of the energy of the particles. We could take into account the injection of pre-existing cosmic rays by taking an injection term proportional to $\delta(x - x_1)\ \delta(t)$, and then integrating the solution over x_1 from $(-\infty)$ to 0 (Toptygin, 1979).

Given the x dependence of the diffusion coefficient, we distinguish three intervals in the x space : $x < -b$, $-b < x < 0$, $x > 0$ (denoted respectively by 1, 1', 2). In the zones 1 and 2, D is constant ; then the equation (17) can easily be integrated to give :

$$\bar{f}_i = A_i \exp (u_{i,+}\, x) + B_i \exp (u_{i,-}\, x) \qquad (18)$$

with

$$u_{i,\pm} = \frac{u_i \pm \sqrt{u_i^2 + 4\, \omega\, D_i}}{2\, D_i} \qquad (19)$$

where i = 1, 2. A_i and B_i are the integration constants. In the zone 1', the change of variable $z = (2/|\alpha|) \sqrt{\frac{\omega}{u_1} (x_o - \alpha\, x)}$ and of function $V(z) = z^{1/\alpha}\, \bar{f}$, lead to a modified Bessel

equation of order $1/|\alpha|$ for V. Then the general solution in the zone 1' is :

$$\bar{f}_{1'} = z^{-1/\alpha} \left[A_{1'} \; I_{1/|\alpha|}(z) + B_{1'} \; K_{1/|\alpha|}(z) \right] \qquad (20)$$

where $I_{1/|\alpha|}$ and $K_{1/|\alpha|}$ are the modified Bessel function of order $1/|\alpha|$

The integration constants are calculated owing to the boundary conditions. At plus or minus infinity, $\bar{f}$ must be finite, so that A_2 and B_1 are equal to 0. At $x = 0$, $\bar{f}$ is continuous and the right (+) and left (-) derivatives verify the relation obtained taking the limit $\varepsilon \to 0$ of the integration of equation (17) between $\pm \varepsilon$:

$$\left(D \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right)_1 (x=o) - \left(D \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right)_2 (x=o) = - \frac{\Delta u}{3} p \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} (x=o) + \frac{Q_o}{\omega} \qquad (21)$$

At b, $\bar{f}$ and $D \, \partial \bar{f}/\partial x$ are continuous. Then we obtain the equation :

$$B_2 \left(- u_1 + F(p,\omega)\right) = \frac{\Delta u}{3} p \frac{\partial B_2}{\partial p} - \frac{Q_o}{\omega} \qquad (22)$$

where :

$$F(p,\omega) = \frac{u_2}{2} \left(1 - \sqrt{1 + 4 \frac{\omega D_2}{u_2^2}}\right) + \frac{u_1}{2} \left(1 + \alpha z_o \frac{M \dot{I}_o - R \dot{K}_o}{M I_o - R K_o}\right) \qquad (23)$$

we have introduced the notation :

$$M = \sqrt{1 + \alpha^2 z_b^2 \frac{D_\infty}{D_b}} \; K_b + \alpha z_b \dot{K}_b \qquad (24)$$

$$R = \sqrt{1 + \alpha^2 z_b^2 \frac{D_\infty}{D_b}} \; I_b + \alpha z_b \dot{I}_b \qquad (25)$$

with $z_i = (2/|\alpha|) \sqrt{\frac{\omega}{u_1} (x_o - \alpha i)}$; $\dot{L} = dL/dz$; $L_i = L_{1/|\alpha|}(z_i)$

where $L \in \{ I_{1/|\alpha|} , K_{1/|\alpha|} \}$

Then :

$$\bar{f}\ (x = o,\ \omega) = f_o\ \frac{1}{\omega}\ \exp \int_{p_o}^{p} \frac{3}{\Delta u}\ F\ (p',\ \omega)\ \frac{dp'}{p'} \qquad (26)$$

Developping $\bar{f}$ to first order around $\omega = 0$, and then taking the inverse Laplace transform, it is easy to obtain an approximate solution for f, valid at sufficiently long times :

$$f\ (x = o, t) \sim f_o\ H\ (t - t_a) \qquad (27)$$

where :

$$t_a = \int_{p_o}^{p} \frac{3}{\Delta u} \left\{ \frac{D_2}{u_2} + \frac{D_o}{u_1} \frac{1}{(1-\alpha)} \left[1 + \left((1-\alpha)\ \frac{D_\infty}{D_b} - 1 \right) \right.\right. \left.\left. (1 + \alpha\ \frac{b}{x_o})^{1\ -\ 1/\alpha} \right] \right\} \frac{dp'}{p'} \qquad (28)$$

A more rigourous calculation is sketched in the Appendix.

As expected if $\alpha > 0$ (< 0) t_a is greater (less) than the usual equilibrium time when D is D_o , which corresponds here to $\alpha = 0$ and $D_\infty = D_b$. For $\alpha = 1$ and $D_\infty = D_b$:

$$t_a = \int_{p_o}^{p} \frac{3}{\Delta u} \left\{ \frac{D_2}{u_2} + \frac{D_o}{u_1} \left[1 + \mathrm{Log}\ (1 + \frac{b}{x_o}) \right] \right\} \frac{dp'}{p'} \qquad (29)$$

We can also study the influence of the value of b on t_a. If $\alpha \ll 1$, when $b \to \infty$:

$$t_a \to \frac{3}{\Delta u} \int_{p_o}^{p} \left[\frac{D_2}{u_2} + \frac{D_o}{u_1\ (1-\alpha)} \right] \frac{dp'}{p'} \qquad (30)$$

so that the influence of D(x) is small. But if $\alpha \geqslant 1$, t_a diverges. This does not mean that the mecanism does not work. Coming back to the initial equation and putting $b = \infty$, $F\ (p,\omega)$ becomes :

$$F(p,\omega) = \frac{u_2}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\,\omega\,D_2}{u_2^2}}\right) + \frac{u_1}{2}\left(1 + \alpha\, z_o \frac{\dot{K}_o}{K_o}\right) \qquad (31)$$

In the case $\alpha = 2$, it is easy to come back to the time space when t is large :

$$f(x{=}o,t) \sim f_o\ \mathrm{erfc}\ \left(\frac{1}{2}\, a' \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \qquad (32)$$

with:

$$a' = \int_{p_o}^{p} \frac{3}{\Delta u} \sqrt{D_o}\ \frac{dp'}{p'} \qquad (33)$$

This solution is valid only after a time long enough that the time spent upstream is greater than the time spent downstream (D_2 is not present). We can, in this case, define an equilibrium time, t_e, at which 96 % of the particles have reached the steady state. Then $t_e = (5\ a')^2$. If D_o is independent of p :

$$t_e \sim 75\, \frac{u_1}{\Delta u}\, \mathrm{Log}\, \left(\frac{p}{p_o}\right)\, t_{a,o} \qquad (34)$$

where $t_{a,o}$ is the equilibrium time when D is constant. The difference between t_e and $t_{a,o}$ increases with p. If b is finite and neglecting the dispersion, the previous solution holds roughly up to $t \sim t_e \sim t_a\,(b)$. For $t_e > t_a\,(b)$, the solution with a finite b is valid.

IV - RANDOM WALK

We are interested in the mean time for the particle to perform a cycle through the shock. This time is the sum of the mean times spent upstream and downstream. To calculate the time spent on each side of the shock, reduces to the following random walk problem : let us consider an absorbing wall moving at the constant velocity u ($u \ll c$), in a diffusive medium with diffusion coefficient D ($D = 1/2\ \lambda\ v$). The wall is "absorbing" in the sense that whenever a particle hits the wall, it jumps to another energy interval and it does not count any more for the calculation of the mean time at the initial energy. At time $t = 0$, a test-particle is set at a distance 1 from the wall. In our case 1 will be the mean free path close to the wall, λ_o. It is at that distance from the wall that a particle which has just crossed the wall, feels the effect of the diffusion. Two questions arise : what is the probability that the particle eventually reaches the wall ? and what is the mean time to do so ? For simplicity we consider diffusion in one dimension. The probability $W(x,t)\,dx$ that the particle be between x and $x + dx$ at time t satisfies the equation :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\,\frac{\partial W}{\partial x}\right) - u\,\frac{\partial W}{\partial x} \qquad (35)$$

The boundary conditions are $W(x, t = 0) = \delta(x-1)$ and $W(x = 0, t) = 0$. A final condition is to avoid a divergence of $W(x,t)$ at infinity (deduced from $\int W(x,t)\,dx \lesssim 1$). The probability of reaching the wall between t and $t + dt$ is :

$$G(t)\,dt = \left(D\,\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{x=o} dt \qquad (36)$$

The probability P that the particle eventually hits the wall is :

$$P = \int_o^\infty G(t)\, dt \tag{37}$$

the mean time to do so is :

$$T \sim \frac{1}{P} \int_o^\infty t\, G(t)\, dt \tag{38}$$

The case, D = constant, can be dealt with exactly (see Cox and Miller, 1965, and Chandrasekhar, 1943, for the case u = 0) and yields :

$$G(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D}} \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left[- \frac{1}{4D} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + u\sqrt{t} \right)^2 \right] \tag{39}$$

Then :

$$P = \exp\left[- 1\ (u + |u|) \ /\ (2\ D) \right] \tag{40}$$

If $u < 0$, $P = 1$; if $u > 0$ and $1 = \lambda_o$, $P \sim 1-2\ u/v$ (to first order in u/v) in agreement with the derivation of Bell (1978a). The mean number of cycles through the shock is :

$$\mathcal{N} = \sum_{n=o}^{\infty} n \left(1 - 2\,\frac{u}{v}\right)^n = \frac{v}{u} \tag{41}$$

As for the mean escape time, its value is :

$$T = \frac{1}{|u|} \tag{42}$$

It has the remarquable property of being independent of the sign of u.

In the case of a uniform diffusion coefficient, it is easy to obtain with this method a time-dependent solution. To obtain the distribution function after n crossings, $G_n(t)$, we solve the problem as above, but using as source function the probability of reaching the wall for the $(n-1)^{th}$ time between t and t + dt. The solution is made easy by the fact that if λ_o is independent of n (which corresponds to D independent of p), the Laplace transform $\overline{G}_n(\omega)$ of $G_n(t)$ obeys :

$$\overline{G_n}(\omega) = \overline{G_{n-1}}(\omega) \quad \overline{G_1}(\omega) \tag{43}$$

with

$$\overline{G_1}(\omega) = \exp\left(-\frac{u\,\lambda_o}{2D}\right) \exp\left(-\frac{\lambda_o}{\sqrt{D}} \sqrt{\frac{u^2}{4D} + \omega}\right) \tag{44}$$

By inverse Laplace transform we obtain :

$$G_n(t) = \frac{n}{2\sqrt{\pi}} \frac{\lambda_o}{\sqrt{D}} \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{4D}\left(n\frac{\lambda_o}{\sqrt{t}} + u\sqrt{t}\right)^2\right] \tag{45}$$

$N = \int_o^t G_n(t)\,dt$ is the number of particles which have reached the wall between the time 0 and t. It is equal to :

$$N = \frac{1}{2} \exp\left(-n\frac{u}{v}\right) \left\{ \exp\left(n\frac{u}{v}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{D}}\sqrt{t} + \frac{n\,\lambda_o}{2\sqrt{D}}\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right. \tag{46}$$

$$\left. + \exp\left(-n\frac{u}{v}\right) \left[2 - \operatorname{erfc}\left(\frac{u}{2\sqrt{D}}\sqrt{t} - \frac{n\,\lambda_o}{2\sqrt{D}}\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right] \right\}$$

erfc(y) is a steep function of y ; it goes from 1 to $\sim$ 0 when y goes from 0 to $\sim$ 4. So that when n is large, a small variation of the ratio $t/(n\,\lambda_o/u)$ causes N to vary from 0 to 1. The relative dispersion is then small ; $N \sim H(t - n\,\lambda_o/u)$. Note that here, we have not taken into consideration the change of velocity at the shock since we are only interested in the spatial diffusion and not in the acceleration.

When D depends on x as in figure 1, the problem becomes more complicated. The details of the calculation are the same as in Section III but here, the knowledge of $\overline{G}(\omega)$ is sufficient to evaluate P and T ; indeed the "sum rule" gives : $P = \overline{G}(\omega = 0)$ and $T \sim \frac{1}{P} \frac{dG}{d\omega}(\omega = 0)$. We have obtained :

$$\overline{G(\omega)} = \left(\frac{z_o}{z_1}\right)^{\frac{|u|}{u}\,\frac{1}{\alpha}} \frac{F_1}{F_o} \tag{47}$$

with

$$F_i = \left[\sqrt{1 + \alpha^2 \frac{D_\infty}{D_b} z_b^2}\, K(z_b) + \alpha\, z_b \frac{dK}{dz}(z_b) \right] I(z_i) - \left[\sqrt{1 + \alpha^2 \frac{D_\infty}{D_b} z_b^2}\, I(z_b) + \alpha\, z_b \frac{dI}{dz}(z_b) \right] K(z_i) \tag{48}$$

We have dropped the suscript $1/|\alpha|$ of K and I. Then :

$$P = \left(1 + \alpha \frac{1}{x_o}\right)^{-\left(1 + \frac{u}{|u|}\right)\frac{1}{\alpha}} \tag{49}$$

As expected P = 1 for $u < 0$ and $P \sim 1 - 2\,u/v$ for $u > 0$ and $1 = \lambda_o$. As for T :

$$T = \frac{1}{|u|}\,\frac{1}{1-\alpha} \left\{ 1 + \left[\frac{D_\infty}{D_b}(1-\alpha) - 1 \right] \frac{x_o}{l} \left(1 + \alpha \frac{b}{x_o}\right)^{1 - \frac{1}{\alpha}} \left[\left(1 + \alpha \frac{1}{x_o}\right)^{1/\alpha} - 1 \right] \right\} \tag{50}$$

which for $1 = \lambda_o$ reduces to :

$$T = \frac{\lambda_o}{|u|}\,\frac{1}{1-\alpha} \left\{ 1 + \left[\frac{D_\infty}{D_b}(1-\alpha) - 1 \right] \left(1 + \alpha \frac{b}{x_o}\right)^{1 - \frac{1}{\alpha}} \right\} \tag{51}$$

We recover the result obtained in Section III. If $b \to \infty$, $T \to \infty$ because the few particles which need a very long time to return to the shock counts a lot. So this mean time does not give us anymore information on the dynamics of the system and we must come back to the transport equation.

A significant advantage of this approach is the possibility of evaluating approximately the mean equilibrium time t_a when u depends on t, but varies slowly during a cycle, by integrating $dp/dt \sim \Delta p/T_{cycle}$, taking into account the variation of u.

V - CONCLUSION

We have assessed the role of the space dependence of the diffusion coefficient on the mechanism of particle acceleration by diffusive shock waves. In many realistic cases, we expect the diffusion coefficient to increase away from the shock, both upstream and downstream ; we have shown that this can slow down the rate of particle acceleration, compared to the rate expected for a uniform diffusion coefficient. The results of this paper are particularly relevant for the study of the acceleration of very high energy particles by supernova shocks. Since the acceleration mechanism is slow, it takes a long time to attain high energies. Supernova shocks have a finite lifetime so that even with the most optimistic assumptions on the diffusion coefficient, particles cannot go beyond an energy of $\sim 10^5$ GeV (Cesarsky and Lagage, 1981). Thus the theory predicts a cut-off or at least a break in that part of the spectrum. In contrast, the observed spectrum of galactic cosmic rays is a power law with constant index up to 10^5 - 10^6 GeV. The influence of the x dependence of the diffusion coefficient is to decrease the maximum energy attained (Lagage and Cesarsky, 1982).

The results presented in this paper may also be interesting when considering cosmic-ray acceleration in a "lossy medium" (e.g. Völk, Morfill and Forman, 1981). The equation (1) does not include the Coulomb or inelastic losses suffered by particles which diffuse back and forth across the shock. Roughly we can say that it is valid if the energy gain after many cycles exceeds by far the energy loss. This condition can be approximately written $4\ D/u^2\ 1/\tau \ll 1$, when the losses occur in a characteristic time τ, and D is independent of x. If D is space dependent, as considered in this paper, the time of a cycle increases, and so does the left hand side of the inequality, leading to a more stringent condition for acceleration.

APPENDIX

Inverse Laplace transform of $\bar{f}$ (x = o,ω)

$\bar{f}$ (x = o, ω) is the product of two terms, $\frac{f_o}{\omega}$ and $\exp \int_{p_o}^{p} \frac{3}{\Delta u} F(p', \omega) \frac{dp'}{p'}$. Then the inverse Laplace transform of $\bar{f}$ (x = o, ω) can be written as

$$f(x = o, t) = f_o \int_o^t \Phi(t')\, dt' \qquad (A.1)$$

where $\Phi(t')$ is the inverse Laplace transform of $\exp \int_{p_o}^{p} \frac{3}{\Delta u} F(p', \omega) \frac{dp'}{p'}$:

$$\Phi(t) = \frac{1}{2 i \pi} \int_{-i\infty+1}^{+i\infty+1} \exp\left[t\omega - h(\omega,p)\right] d\omega \qquad (A.2)$$

where

$$h(\omega,p) = - \int_{p_o}^{p} \frac{3}{\Delta u} F(p',\omega) \frac{dp'}{p'} \qquad (A.3)$$

The value of 1 is such that all the singularities of the integrand lie to the right of the curve x = 1 in the complex plane. An approximate solution of the integration (A.2), valid for sufficiently long times, can be obtained by the method of steepest descent which has been used for the case D independent of x and has given excellent results (Drury, 1982).

We have verified that the conditions for the application of this method are satisfied, when the diffusion coefficients are independent of p, in two cases : $\alpha = 2/3$ and $\alpha = 2$

(Lagage, 1982). Indeed except in the real interval $\omega < \omega_o = \max(-u_2^2/4D_2, -u_1^2/4D_\infty)$, h is an analytic function and in the interval $\omega > \omega_o$, h is a real positive monotonically increasing concave function with $dh/d\omega \to \infty$ as $\omega \to \omega_o$ and $dh/d\omega \to 0$ as $\omega \to \infty$. Then the function $t\,\omega - h(\omega)$ has a single minimum at ω_t given by $dh/d\omega\,(\omega_t) = t$. We expect that the behavior of h is similar for other values of α. Expanding h around ω_t to second order and then integrating along the steepest path the integral of eq. (A.2) becomes :

$$\Phi(t') = \frac{1}{\sqrt{-2\pi h''(\omega_t)}} \exp\left[t\,\omega_t - h(\omega_t)\right] \qquad (A.4)$$

The exponential is maximum when ω_t is 0. Expanding h around $\omega_t = 0$ we obtain $h \sim \omega\, t_a - \omega^2 t_b^2$ with :

$$t_a = \frac{3}{\Delta u}\left\{\frac{D_2}{u_2} + \frac{D_o}{u_1}\frac{1}{(1-\alpha)}\left[1 + \left((1-\alpha)\frac{D_\infty}{D_b} - 1\right)\left(1 + \alpha\frac{b}{x_o}\right)^{1-1/\alpha}\right]\right\}\mathrm{Log}\,\frac{p}{p_o} \qquad (A.5)$$

and

$$t_b^2 = \frac{3}{\Delta u}\left\{\frac{D_2^2}{u_2^3} + \frac{D_o^2}{u_1^3}\,\ell\xi\right\}\mathrm{Log}\left(\frac{p}{p_o}\right) \qquad (A.6)$$

with :

$$\ell\xi = -\frac{1}{\alpha}\left\{\frac{D_\infty}{D_b}\left(\frac{z_o}{z_b}\right)^{2(\frac{1}{\alpha}-2)}\left[-\frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \alpha\left(\frac{z_b}{z_o}\right)^{2(\frac{1}{\alpha}-1)}\right) + \left(\frac{z_o}{z_b}\right)^2 - \alpha\frac{D_\infty}{D_b}\right] + \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{2\alpha-1}\left(1 - \left(\frac{z_o}{z_b}\right)^{2(\frac{1}{\alpha}-2)}\right) + \left(\frac{z_b}{z_o}\right)^2 - \left(\frac{z_o}{z_b}\right)^{2(\frac{1}{\alpha}-1)}\right] - \frac{1}{1-\alpha}\left[1 + \left((1-\alpha)\frac{D_\infty}{D_b} - 1\right)\left(\frac{z_o}{z_b}\right)^{\frac{2}{\alpha}-2}\right]\left[\frac{1}{1-\alpha}\left(-1 + \alpha\left(\frac{z_o}{z_b}\right)^{2(\frac{1}{\alpha}-1)}\right) + \left(\frac{z_b}{z_o}\right)^2\left(1 + \alpha\frac{D_\infty}{D_b}\left(1 - \left(\frac{z_o}{z_b}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right)\right)\right]\right\} \qquad (A.7)$$

which for the case $\alpha = 1$ becomes :

$$2\left[1 + \frac{D_\infty}{D_b}\left(1 + \frac{D_\infty}{D_b}\right)\right]\left(\frac{z_b}{z_o}\right)^2 - \mathrm{Log}^2\left(\frac{z_b}{z_o}\right) - 4\,\frac{D_\infty}{D_b}\,\mathrm{Log}\left(\frac{z_b}{z_o}\right) - 2 - 2\,\frac{D_\infty}{D_b} - \left(\frac{D_\infty}{D_b}\right)^2 \qquad (A.8)$$

Then :

$$\Phi(t) \sim \frac{1}{t_b\sqrt{\pi}}\,\exp\left[-(t - t_a)^2/t_b^2\right] \qquad (A.9)$$

So that Φ is centered on t_a. When $t_b \ll t_a$, the approximate expression (A.9) can be applied at all t. Then :

$$f(x = o,t) = f_o\left[1 - \mathrm{erfc}\left(\frac{t - t_a}{t_b}\right)\right] \qquad (A.10)$$

REFERENCES

Axford, W.I., Leer, E. and Skadron, G., 1977, Proc. 15th Int. Conf. on Cosmic Rays (Plovdiv), 11, 132.

Axford, W.I., 1981, Proc. 17th Int. Conf. on Cosmic Rays (Paris), 12, 155.

Bell, A.R., 1978a, M.N.R.A.S. 182, 147.

Bell, A.R., 1978b, M.N.R.A.S. 182, 443.

Blandford, R.D., Ostriker, J.P., 1978, Ap. J. (Lett.) 221, L29.

Cesarsky, C.J., Lagage, P.O., 1981, Proc. 17th Int. Conf. on Cosmic Rays (Paris), 9, 250.

Chandrasekhar, S., 1943, Rev. Mod. Phys. 15, 1.

Cox, D.R., Miller, H.D., 1965, The Theory of Stochastic Processes, Methuen, London.

Drury, L.O'C., 1982, in preparation.

Ginzburg, V.L., Ptuskin, V.S., 1981, Proc. 17th Int. Conf. on Cosmic Rays (Paris), 2, 236.

Kraichnan, R.H., 1965, Phys. Fluid., 8, 1385.

Krymsky, G.F., 1977, Dok. Akad. Nauk S.S.S.R., 234, 1306.

Krymsky, G.F., Elshin, V.K., Romashenko, Yu. A., Bezrodnykh, I.R., 1978, Izv. Ak. Nauk S.S.S.R. Ser. fiz. V 42, n° 5, 1070.

Krymsky, G.F., Kuzmin, A.I., Petukhov, S.I., Turpanov, A.A., 1979, Proc. 16th Int. on Cosmic Rays (Kyoto), 2, 39.

Lagage, P.O., 1982, Thèse de 3ème Cycle, Université d'Orsay.

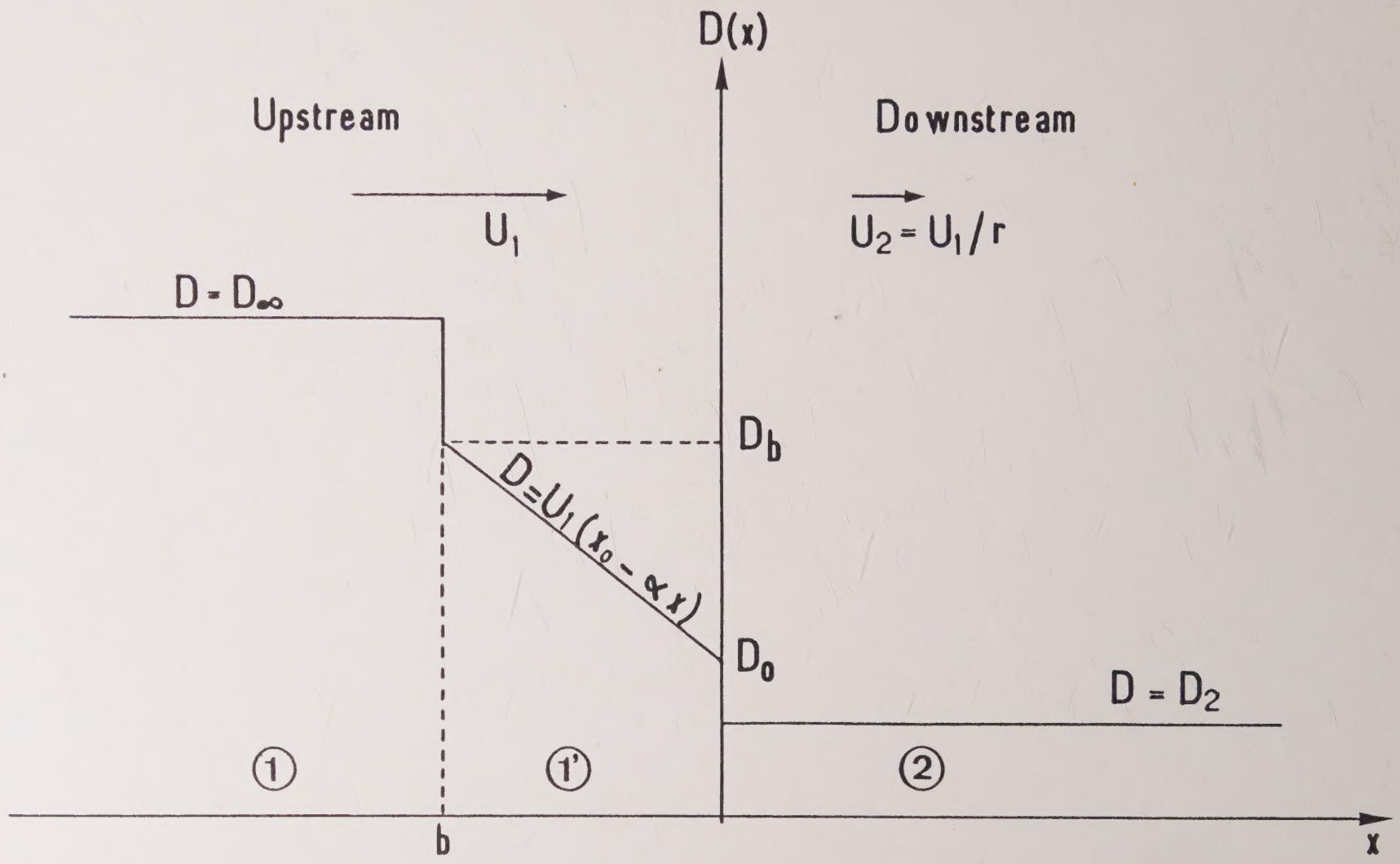
Lagage, P.O., Cesarsky, C.J., 1982, in preparation.

Toptygin, N., 1979, Izv. Ak. Nauk S.S.S.R. Ser. fiz. V 43, n° 4, 755.

Völk, H.J., Morfill, G.E., Forman, M.A., 1981, Ap. J., 249, 161.

FIGURE CAPTION

Figure 1 - Variation of D with x, used in Section III for the calculation of the equilibrium time t_a.


D(x)
Upstream
Downstream
U1
U2 = U1 / r
D = D∞
Db
D = U1 (x0 - α x)
D0
D = D2
1
1'
2
b
x